

Colecția "MECANICA"

**METODE MODERNE DE EVALUARE
A INTEGRITĂȚII ȘI DURABILITĂȚII**

Lucrarea se încadrează în domeniul de mare actualitate al evaluării integrității și durabilității structurilor, care pe plan mondial și național reprezintă o prioritate în vederea prelungirii duratei de viață a componentelor și structurilor de rezistență. Pe lângă noțiunile generale de mecanica ruperii în care se introduc parametri specifici criteriilor de rupere, sunt prezentate metode și abordări moderne pentru determinarea parametrilor de mecanica ruperii: numerice („Metoda Elementelor Finite“) și experimentale („Metoda fotoelasticimetrici“, „Metoda termoelasticimetrici“).

Referent științific: Prof. univ. dr. ing. Nicolae NEGUȚ

După un vast studiu bibliografic, lucrarea prezintă câteva metode recente, propuse în literatura de specialitate, de evaluare a integrității structurilor, și anume „Teoria distanțelor critice“, „Metoda valorii medii a energiei specifice de deformație“, „Metoda volumetrică“ și „Metoda modelării fisurii“. Aplicarea metodelor implică determinarea câmpului tensiunilor și deformațiilor din zonele critice ale structurii prin analize numerice cu metoda elementului finit.

Referent științific: Conf. dr. ing. Dana SILAGHI - PERJU

RADU NEGRU

LIVIU MARȘAVINA

METODE MODERNE DE EVALUARE A INTEGRITĂȚII ȘI DURABILITĂȚII

Colecția "MECANICA"

EDITURA POLITEHNICA
TIMIȘOARA - 2019

Copyright © Editura Politehnica, 2019

Nicio parte din această lucrare nu poate fi reprodusă, stocată sau transmisă prin indiferent ce formă, fără acordul prealabil scris al Editurii Politehnica.

EDITURA POLITEHNICA

Bd. Vasile Pârvan nr. 2b
300223 Timișoara, România

Tel./Fax. 0256/404.677

E-mail: editura@upt.ro

Consilier editorial: Prof. dr. ing. Sabin IONEL

Redactor: Claudia MIHALI

Bun de imprimat: 12.03.2019

ISBN 978-606-35-0285-9 (Online)

Prefață

Evaluarea integrității și durabilității structurilor din diferite domenii, cum ar fi energia nucleară, aeronautică, industria automotive, ingineria civilă, ingineria mecanică, reprezintă o provocare în vederea extinderii duratei de viață a componentelor și a scăderii numărului de cedări. **Mecanica ruperii materialelor** pune la dispoziția inginerilor o metodologie de evaluare a integrității corpurilor cu fisuri pe baza parametrilor din domeniul liniar-elastic *Forța de extensie a fisurii G* și *Factorul de intensitate a tensiunii K* , respectiv în domeniul elasto-plastic *Deplasarea de deschidere la vârful fisurii δ* și *Integrala J* . De asemenea, pentru estimarea durabilității sub acțiunea solicitărilor variabile se utilizează relații care corelează *Viteza de propagare a fisurii da/dN* cu *Variația factorilor de intensitate ai tensiunii ΔK* . Conceptele Mecanicii ruperii au fost extinse la piese cu concentratori de tensiune de forma creștăturilor ascuțite sau rotunjite pe baza unor metode și parametri noi.

Prezenta lucrare trece în revistă conceptele clasice de Mecanica ruperii (capitolul 1), prezintă principalele criterii de rupere în modul mixt (capitolul 2), metodele numerice (capitolul 3) și experimentale (capitolul 4) de determinare a parametrilor de Mecanica ruperii. Se prezintă în capitolul 5 două abordări ale calculului la oboseală, abordarea în tensiuni și abordarea considerând inițierea și propagarea fisurii. În capitolul 6 sunt prezentate soluții ale câmpului de tensiune din zona de la vârful concentratorilor de tensiune. Sunt introduse pentru prima dată în România, după cunoștința autorilor, metode moderne de evaluare a integrității și durabilității cum ar fi: *Teoria distanțelor critice*, *Metoda energiei specifice de deformație*, *Metoda modelării fisurii* și *Metoda volumetrică* (capitolul 7). Lucrarea se încheie cu capitolul 8, bazat pe experiența de peste 15 ani autorilor, care prezintă exemple și aplicații ale metodelor moderne aplicate unor componente cu fisuri și concentratori de tensiune.

Autorii mulțumesc referenților științifici Prof. Emerit. Dr. Ing. Nicolae NEGUȚ și Conf. Dr. Ing. Dana SILAGHI-PERJU pentru sugestiile de îmbunătățire a lucrării. De asemenea, mulțumim Domnului Prof. Filippo BERTO de la **Norwegian University of Science and Technology (NTNU)**, Trondheim, cu care ne-am consultat privind aplicarea și utilizarea metodelor moderne, cu ocazia vizitei la NTNU în perioada 28.05-01.06.2017, realizată în cadrul proiectului de mobilitate nr. 24BIL/25.04.2017

Timișoara
07.06.2018

Autorii

1. Noțiuni de mecanica ruperii pentru evaluarea integrității structurale

1.1. Introducere

Ruperea este considerată un proces distructiv care are ca efect separarea totală sau parțială a unui corp sau structură. În general, ruperea se produce datorită propagării unei sau mai multor fisuri. Din punct de vedere ingineresc în cele mai multe cazuri abordarea macroscopică a ruperii este suficientă, dar sunt situații în care abordările la scară mesoscopică (studiul fenomenelor de degradare la nivelul grăunților), respectiv microscopică/atomică (materiale compozite) sunt necesare, figura 1.1.

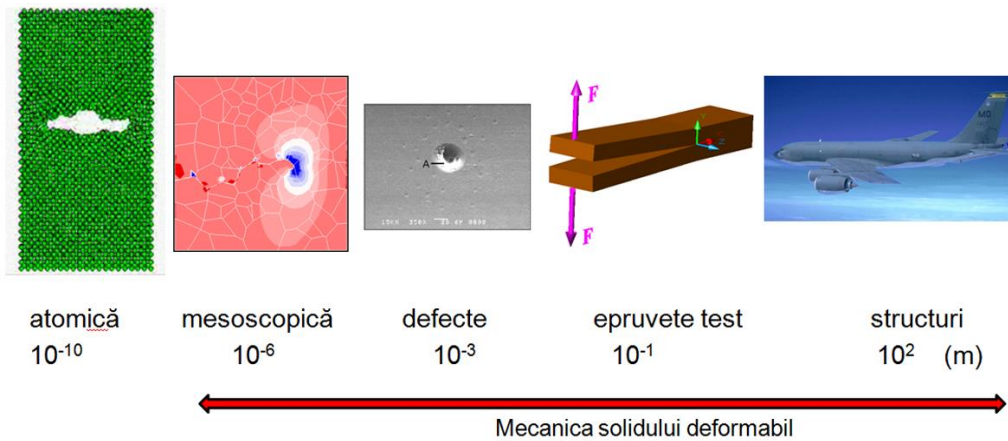


Figura 1.1. Exemple de rupere la diferite scări

Mecanica solidului deformabil se poate aplica de la scară mesoscopică ($10^{-6} m$) până la studiul structurilor ($10^2 m$) și folosește tensiunile și deformațiile pentru descrierea comportării mecanice, figura 1.1. Totuși aceste mărimi nu sunt aplicabile pentru caracterizarea proceselor de rupere, tensiunile devin infinite la vârful fisurii. Astfel **Mecanica Ruperii Materialelor** (MRM) introduce concepte și mărimi suplimentare cum ar fi factorul de intensitate a tensiunii, respectiv forța de extensie a fisurii.

Pornind de la variația lungimii fisurii în timp (figura 1.2.a), respectiv a tensiunii reziduale în funcție de lungimea fisurii (figura 1.2.b), Mecanica ruperii materialelor caută să răspundă la următoarele întrebări, Janssen, ș.a (2002):

- Cum variază rezistența reziduală a unei structuri pe măsură ce o fisură inițială se propagă în timp?

- Care este lungimea maximă a fisurii acceptată în serviciu, sau care este mărimea admisibilă a acesteia?

- Care este durata de timp necesară pentru ca o fisură cu o anumită lungime (lungimea minimă detectabilă) să atingă valoarea maximă admisă?

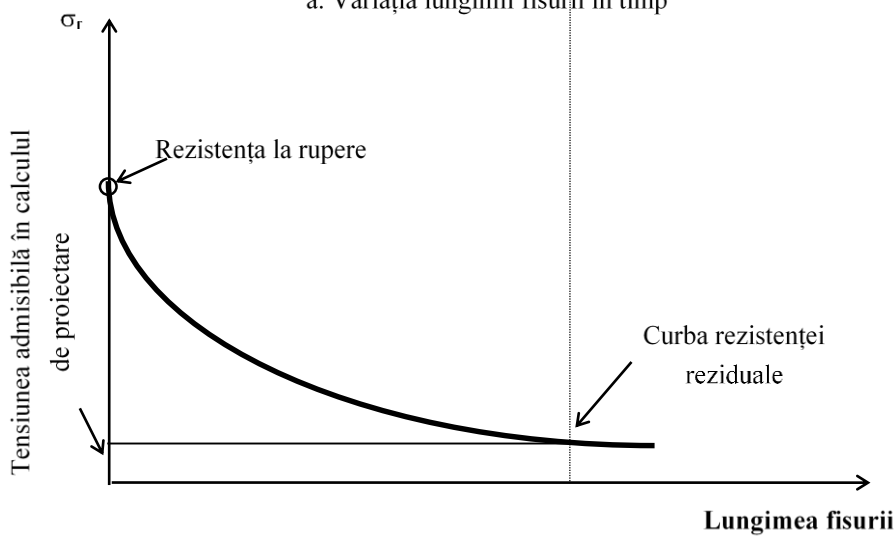
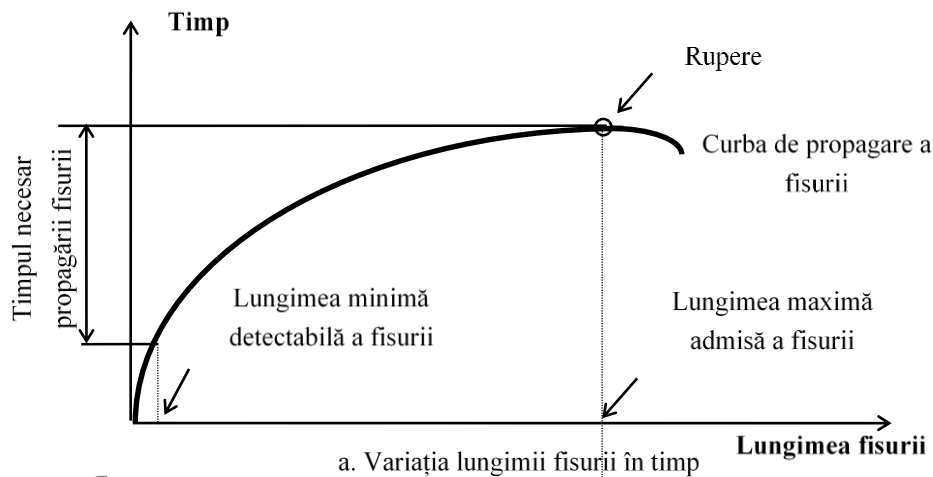


Figura 1.2. Interacțiunea timp - lungime fisură - tensiune reziduală

Primele studii de investigarea a ruperii provin din perioada Renașterii italiene. Experimentele lui Leonardo da Vinci (1452–1519), efectuate cu peste 500 de ani în urmă, au evidențiat că rezistența la tracțiune a unui fir mai lung este mai mică decât rezistența

la rupere a aceluiași fir, dar mai scurt, figura 1.3. Aceasta se explică prin natura statistică a distribuției defectelor într-o structură. Aceste defecte produc o concentrare a tensiunilor ceea ce face ca rezistența teoretică la rupere în imediata vecinătate a acestora să fie atinsă chiar dacă tensiunile nominale aplicate sunt mult mai mici decât rezistența la rupere.

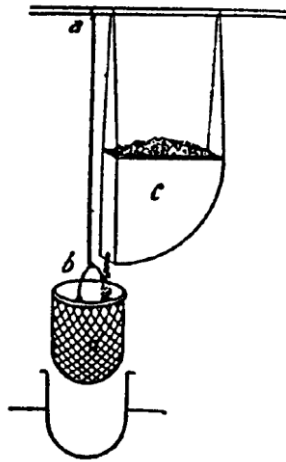


Figura 1.3. Experimentul lui Leonardo

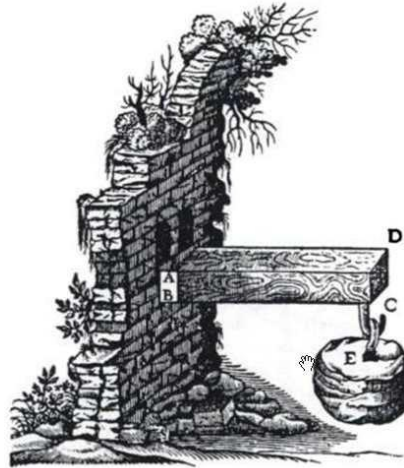


Figura 1.4. Grinda lui Galilei

Codex Atlanticus, sheet 222, 1486-1490

<http://newtonexcelbach.files.wordpress.com/2008/02/galileo-beam.jpg>

Galileo Galilei (1564-1642) a studiat ruperea grinzilor de lemn, figura 1.4 și a ajuns la concluzia că momentul de încovoiere joacă un rol crucial. În paralel cu dezvoltarea mecanicii solidului, o serie de teorii de rupere sau cedare au fost propuse în secolul XIX, unele dintre ele fiind folosite și astăzi. Totuși prima contribuție majoră în abordarea ruperii a fost cea a lui A.A. Griffith (1893–1963) care introduce conceptul de energie necesară pentru propagarea fisurii, formulând un criteriu energetic. Apoi în 1939 W. Weibull (1887-1979) formulează o teorie statistică a ruperii. Una dintre cele mai importante contribuții în Mecanica ruperii o aduce G.R. Irwin (1907-1998) în 1951 care exprimă singularitatea câmpului de tensiune de la vârful fisurii și introduce factorul de intensitate a tensiunii, care își găsește rapid aplicabilitate la calculul structurilor cu defecte. Atât forța de extensie a fisurii cât și factorul de intensitate a tensiunilor sunt concepte aplicabile materialelor linear elastice și care manifestă o rupere fragilă.

În anii '60 s-au pus bazele Mecanicii ruperii pentru materialele cu comportare elasto-plastică. Astfel, Wells a introdus în anul 1966 conceptul de deschidere critică la vârful fisurii. Apoi, Rice în 1968 propune integrala J ca parametru de rupere. Creșterea

subcritică a fisurii, sub acțiunea solicitărilor variabile sau sub acțiunea mediilor corozive a fost studiată de Paris (1961), care a propus prima relație empirică ce leagă variația factorului de intensitate a tensiunii de viteza de creștere a fisurii.

Numeroase accidente au demonstrat că prezenta unor defecte în diferite condiții de solicitare pot conduce la ruperi fragile, în unele cazuri chiar catastrofale. Dintre cele mai semnificative exemple, putem aminti ruperea în anul 1919 a unui rezervor cu diametrul de 27 m și înălțimea de 15 m umplut cu melasă. Prin ruperea acestui rezervor 7,5 milioane de litri de melasă au fost deversați în râul Boston (S.U.A) iar 12 persoane au murit. Între anii 1930-1940 ruperea a numeroase poduri, în special în condițiile unor temperaturi scăzute, au produs multe victime. Dintre acestea putem aminti podul Vierendeel din Belgia rupt în martie 1938 la o temperatura foarte scăzută.

Numeroase accidente au fost raportate în decursul celui de-al doilea război mondial, când ruperile fragile au ridicat probleme deosebite în special asupra unor nave și petroliere. Astfel putem aminti petrolierul Schenectady, realizat în construcție sudată, care s-a rupt efectiv în două bucăți în ianuarie 1943. În următorii 10 ani, peste 200 de nave construite pentru a fi utilizate în război au suferit ruperi fragile. Dintre acestea pot fi reținute în special cele nouă cargouri T-2 și șapte nave Liberty. În toate cazurile ruperile au apărut în zonele cu concentratori puternici de tensiune.

În anul 1950, două avioane COMET s-au rupt în timpul zborului la mare altitudine. Expertizele au arătat că ruperea prin oboseală s-a inițiat în zona găurilor niturilor din apropierea hublourilor. Un alt accident, demn de semnalat, a fost ruperea fragilă în anul 1967 a podului Point Pleasant din Virginia (S.U.A), cauzând moartea a peste 40 de persoane.

De-a lungul anilor s-au publicat diferite studii și cercetări privind investigarea fenomenelor de rupere a diferitelor componente sau structuri. Cele mai importante contribuții în domeniu se publică în jurnalele unor edituri renumite: *International Journal of Fracture* (Springer), *Engineering Fracture Mechanics* (Elsevier), *International Journal of Fatigue* (Elsevier), *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* (Elsevier), *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* (John Wiley & Sons), *Engineering Failure Analysis* (Elsevier).

De asemenea s-au elaborat tratate, manuale și compendii privind principalele abordări în Mecanica ruperii, care introduc parametrii de mecanica ruperii, explică modurile de cedare, propun și analizează diferite criterii de rupere. Dintre acestea principalele contribuții sunt ale lui Broek (1986), Hertzberg (1988), Ewalds și Wanhill (1989), Anderson (1991), Janssen ș. a. (2002). De asemenea, în limba română au fost

publicate lucrările Cioclov (1977), Pană (1992), Dumitru și Marșavina (2001) Constantinescu (2003), Pastramă (2004).

1.2. Parametrii de mecanica ruperii în domeniul liniar-elastic

1.2.1 Teoria lui Griffith

Se consideră o placă infinită confecționată dintr-un material ideal elastic solicitat de tensiunea σ , figura 1.5. Considerând că se introduce o fisură străpunsă de lungime $2a$, energia de deformație elastică se modifică. Energia totală înmagazinată de placă, poate fi scrisă sub forma:

$$W = W_0 + \Delta W_e + \Delta W_\gamma - L \quad (1.1)$$

în care:

W_0 - energia de deformație elastică disponibilă atunci când fisura nu se propagă;

ΔW_e - variația energiei de deformație elastică ca urmare a extensiei fisurii;

ΔW_γ - variația energiei superficiale ca urmare a formării noilor suprafețe ale fisurii în extensie;

L - lucrul mecanic al forțelor exterioare.

Propagarea instabilă a fisurii de lungime a , care străbate o grosime egală cu unitatea, se produce atunci când:

$$\frac{dW}{da} \leq 0 \quad (1.2)$$

respectiv, creșterea energiei necesară formării noilor suprafețe de rupere este compensată prin micșorarea energiei de deformație elastică.

Având în vedere că W_0 este o constantă ($dW_0/da = 0$), rezultă:

$$\frac{d}{da} (\Delta W_e + \Delta W_\gamma - L) \leq 0$$

sau

$$\frac{d}{da} (L - \Delta W_e) \geq \frac{d(\Delta W_\gamma)}{da} \quad (1.3)$$

Din relația de mai sus rezultă, conform teoriei lui Griffith (1921), că instabilitatea în extensia unei fisuri se produce atunci când energia de deformație elastică disponibilă într-un corp este cel puțin egală cu energia necesară formării noilor suprafețe de rupere.

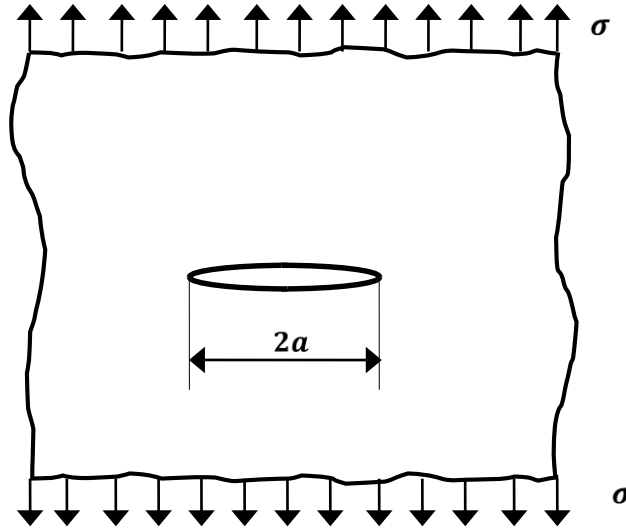


Figura 1.5 Placă infinită cu o fisură de lungime $2a$ sollicitată la infinit de tensiunea σ

Introducând notațiile:

$$\frac{d}{da}(L - \Delta W_e) = G \quad (1.4)$$

unde G reprezintă forța de extensie a fisurii, iar

$$\frac{d(\Delta W_\gamma)}{da} = R \quad (1.5)$$

unde R este rezistența la fisurare, ecuația (1.3) capătă forma:

$$G \geq R$$

Deci o fisură se propagă instabil atunci când forța de extensie a fisurii este cel puțin egală cu rezistența la fisurare a materialului.

Energia elastică eliberată la introducerea fisurii de lungime $2a$ în placă este:

$$\Delta W_e = -\frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} \quad (1.6)$$

Prin introducerea fisurii de lungime $2a$ variația energiei superficiale de suprafață ΔW_γ crește cu cantitatea:

$$\Delta W_\gamma = 2(2a \cdot 1 \cdot \gamma_e) \quad (1.7)$$

în care γ_e reprezintă componenta elastică a energiei specifice superficiale, iar $2(2a \cdot 1)$ este aria suprafețelor formate prin introducerea într-o placă cu grosimea egală cu unitatea a unei fisuri cu lungimea $2a$.

Dacă acceptăm că lucrul mecanic al forțelor exterioare $L = 0$, se obține energia totală pentru o placă cu grosimea egală cu unitatea:

$$W = W_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} + 4a\gamma_e \quad (1.8)$$

Instabilitatea în extensia unei fisuri se obține din condiția:

$$\frac{dW}{da} = 0, \quad \frac{d}{da} \left(W_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2}{E} + 4a\gamma_e \right) = 0 \quad (1.9)$$

dar $dW_0/da = 0$, de unde rezultă:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} = 2\gamma_e = R \quad (1.10)$$

respectiv:

$$\sigma\sqrt{a} = \left(\frac{2E\gamma_e}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.11)$$

Întrucât E și γ_e sunt niște constante de material, rezultă că propagarea instabilă a unei fisuri într-un material ideal elastic se produce atunci când produsul $\sigma\sqrt{a}$ atinge o valoare critică specifică fiecărui material. Acest fapt rezultă și din figura 1.6 care se obține prin reprezentarea grafică a ecuației (1.8).

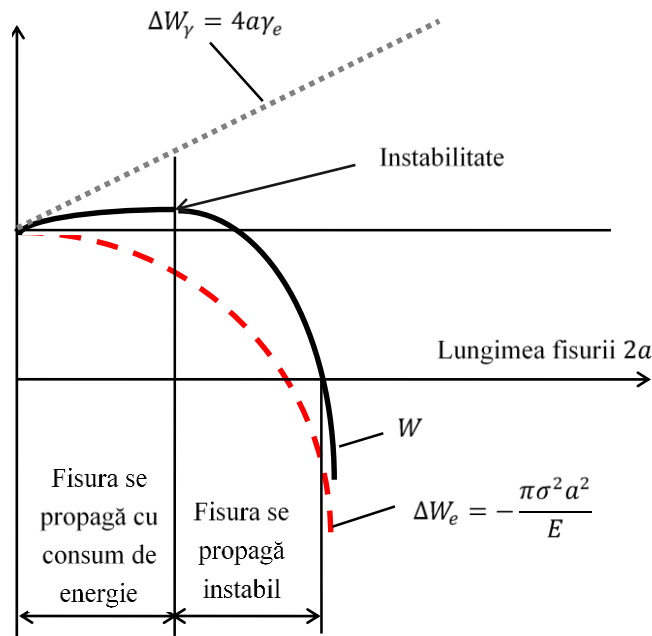


Figura 1.6. Variația energiei totale a unei plăci fisurate

1.2.2 Modificări ale teoriei lui Griffith

O extindere a teoriei lui Griffith a fost efectuată de Irwin (1948), având ca scop obținerea unui criteriu de rupere, respectiv pentru calculul tensiunilor la care apar ruperile fragile.

Mărimea cea mai importantă din teoria prezentată mai sus este forța de extensie a fisurii, a cărei notație cu G a fost dată de Irwin în onoarea lui Griffith. Forța de extensie a fisurii măsurată în $[J/m^2]$ sau $[N/m]$, reprezintă, așa după cum am văzut, cantitatea de energie elastică eliberată, pe unitatea de suprafață, de către o epruvetă fisurată ca urmare a extensiei unei fisuri. Atunci când această mărime atinge o valoare critică G_c fisura se propagă instabil.

Spre deosebire de Griffith, Irwin consideră pe G drept un parametru a cărui valoare critică G_c pare a fi o constantă de bază a unui material, independentă de forma și dimensiunile epruvetei.

Valorile lui G_c pentru oțel variază între $12 \cdot 10^4 - 72 \cdot 10^4 [J/m^2]$ în funcție de temperatură și compoziție.

Din relația (1.10) rezultă pentru o placă infinită având o fisură cu lungimea $2a$:

$$G_c = \frac{\pi \sigma_{cr}^2 a}{E} \quad (1.12)$$

unde σ_{cr} este tensiunea critică, care aplicată plăcii conduce la ruperea fragilă a acesteia.

Orowan (1955) a arătat că la majoritatea materialelor, în special la metale, ruperea este însoțită de deformații plastice importante. Pentru astfel de materiale s-a propus o corecție a ecuației (1.10) sub forma:

$$G_c = \frac{\pi \sigma^2 a}{E} = 2(\gamma_e + \gamma_p) \quad (1.13)$$

unde γ_p este componenta plastică a energiei specifice superficiale.

Dacă γ_p este cuprins între $10^2 - 10^5 [J/m^2]$, în schimb γ_e este de ordinul $1 - 2 [J/m^2]$. În aceste condiții, în relația (1.13), se poate neglija γ_e în raport cu γ_p . Rezultă:

$$\sigma \approx \left(\frac{2 E \gamma_p}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.14)$$

Pentru o placă cu lățimea infinită, având o fisură de lungime $2a$, relația dintre tensiunea σ și forța de extensie a fisurii G devine:

$$\sigma = \left(\frac{EG}{\pi a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.15)$$

În teoria originală a lui Griffith s-a presupus că fisura se propagă rapid când $G = 2 \gamma_e$. În cazul modificării pe care Irwin a făcut-o acestei teorii, G_c este considerat un parametru determinat experimental.

1.2.3 Moduri de rupere

În figura 1.7 sunt indicate cele trei moduri de extensie a fisurii. După deplasarea relativă a suprafețelor de rupere, situate de o parte și de alta a planului în care se extinde fisura, propagarea acesteia se poate face în trei moduri.

În **modul I** fisura se extinde prin deschidere ca urmare a deplasării punctelor de pe suprafața fisurii după o direcție perpendiculară pe planul acesteia (figura 1.7a).

În **modul II** fisura se extinde prin forfecare plană. Deplasările punctelor de pe suprafața fisurii au loc în planul acesteia, perpendicular pe frontul fisurii și în sensul de înaintare a fisurii (figura 1.7b).

Fisura se extinde prin forfecare anti-plană, laterală, în **modul III**. Deplasările punctelor de pe suprafața fisurată au loc în planul fisurii, paralel cu frontul acesteia (figura 1.7c).

Alte moduri posibile de propagare se pot obține prin combinarea celor trei.

În continuare se va face o analiză a stării de tensiuni și deformație în vecinătatea unei fisuri, care se extinde în modulul I, întrucât ruperile fragile au loc în general prin deschiderea fisurii.

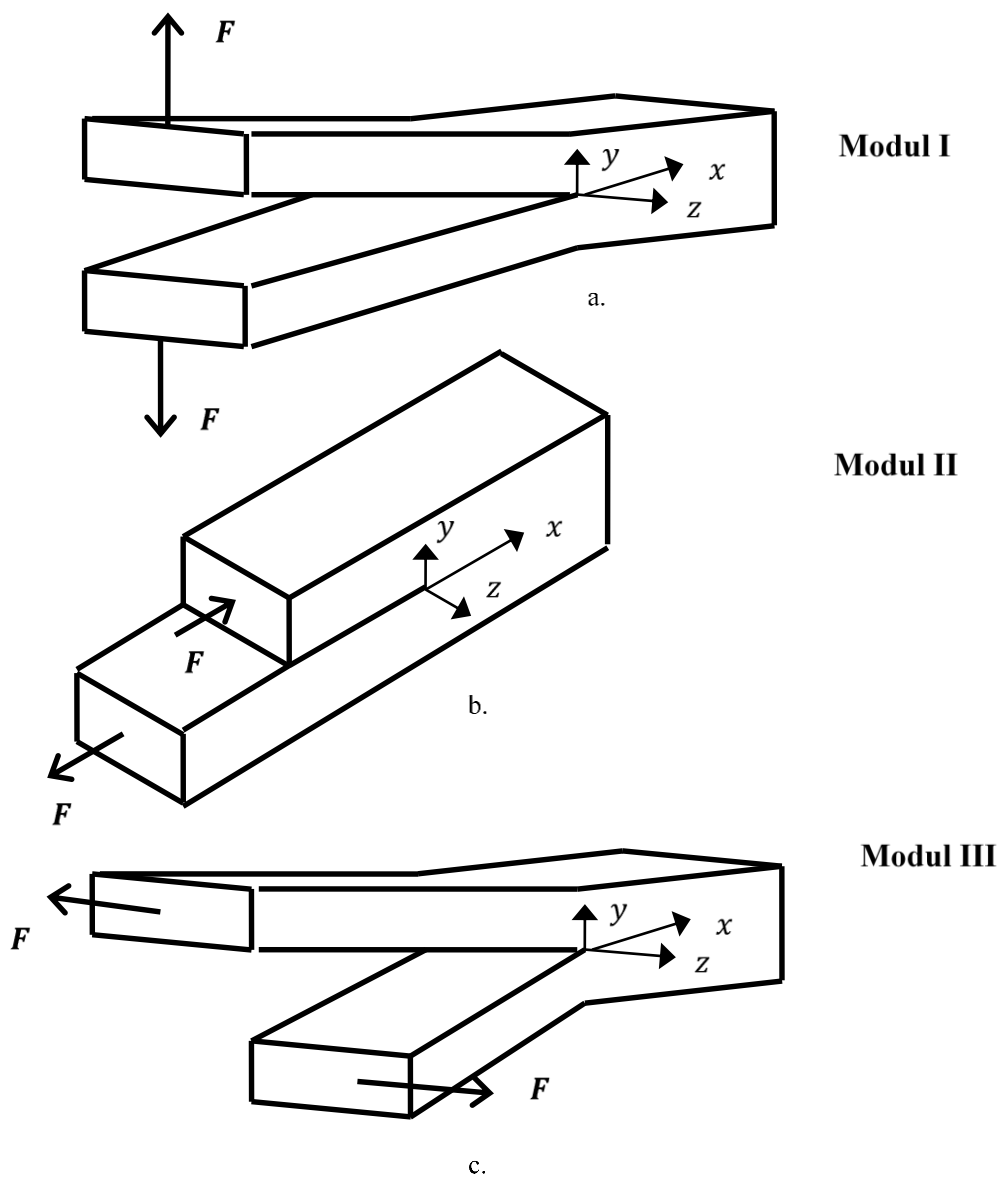


Figura 1.7 Moduri de rupere

1.2.4. Câmpul de tensiuni din vecinătatea unei fisuri

Irwin exprimă câmpul de tensiuni din vecinătatea unei fisuri, figura 1.8, într-un corp omogen cu comportare liniar - elastică, pornind de la soluția Westergaard exprimată cu funcții de variabilă complexă și printr-o aproximare la vârful fisurii ajunge la relația generală:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} [K_I f_{ij}^I(\theta) + K_{II} f_{ij}^{II}(\theta) + K_{III} f_{ij}^{III}(\theta)] + \text{termen nesingular} \quad (1.16)$$

unde i, j reprezintă coordonatele carteziene x, y, z iar (r, θ) coordonatele polare ale unui sistem cu originea la vârful fisurii.

Din relația (1.16) se observă că tensiunile la vârful unei fisuri se calculează ca produsul dintre un factor geometric $\frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{I,II,III}(\theta)$, care depinde de poziția elementului în care se calculează tensiunile, coordonatele (r, θ) și factorii K_I, K_{II}, K_{III} . Aceștia reprezintă o măsură a creșterii tensiunii în prezența unei fisuri în raport cu tensiunea existentă în placă în absența fisurii și au fost denumiți **factori de intensitate a tensiunii**. Indicele I este utilizat pentru a preciza că se referă la modul I de solicitare, pentru modurile II și III de deschidere a fisurii acest factor s-a notat cu K_{II} , respectiv K_{III} .

Tabelul 1.1. Expresiile factorilor adimensionali de intensitate a tensiunii

| f_{ij} | Mode I | Mode II | Mode III |
|----------|---|---|--------------------------|
| f_{xx} | $\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$ | $-\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right)$ | 0 |
| f_{yy} | $\cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$ | $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$ | 0 |
| f_{zz} | $\begin{cases} 0 & -st. pl. tensiune \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & -st. pl. deformație \end{cases}$ | $\begin{cases} 0 & -st. pl. tensiune \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & -st. pl. deformație \end{cases}$ | 0 |
| f_{xy} | $\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$ | $\cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right)$ | 0 |
| f_{xz} | 0 | 0 | $-\sin \frac{\theta}{2}$ |
| f_{yz} | 0 | 0 | $\cos \frac{\theta}{2}$ |

Pentru modul *I* deschiderea flancurilor fisurii $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, iar pentru modurile *II* și *III* care reprezintă forfecare plană sau antiplană produsă de o tensiune tangențială τ , $K_{II} = \tau\sqrt{\pi a}$, respectiv τ_L , $K_{III} = \tau_L\sqrt{\pi a}$. Factorul de intensitate a tensiunii se măsoară de obicei în $[\text{MPa}\sqrt{\text{m}}]$, sau $[\text{N}/\text{mm}^{3/2}]$. Funcțiile $f_I^{I,II,III}(\theta)$ se mai numesc și factori adimensionali de intensitate a tensiunii și au expresiile prezentate în tabelul 1.1

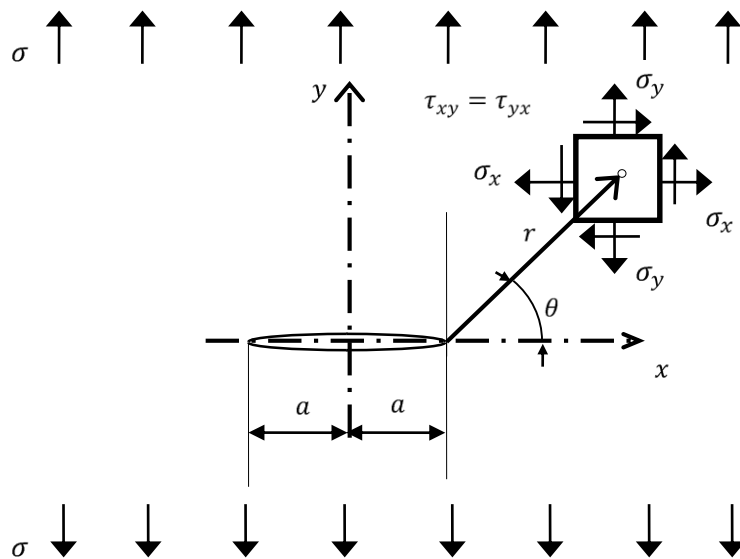


Figura 1.8. Tensiunile într-un punct de coordonate (r, θ) aflat în vecinătatea fisurii

Expresia factorului de intensitate a tensiunii $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, este valabilă pentru o placă infinită cu fisură centrală de lungime $2a$, sollicitată uniform, după modului *I*. Geometria fisurii, precum și forma și dimensiunile piesei, influențează esențial câmpul de tensiuni și deformații în zona adiacentă acestei fisuri. În aceste condiții, expresia factorului de intensitate a tensiunii are forma generală:

$$K_I = \alpha\sigma\sqrt{\pi a} f\left(\frac{a}{w}\right) \quad (1.17)$$

unde α este un coeficient ce ține seama de geometria corpului fisurat și tipul de solcitare, iar $f(a/w)$ reprezintă în general o funcție care ține cont de forma finită a corpului fisurat, w reprezentând una din dimensiunile corpului.

Atât α cât și $f(a/w)$ se determină pe baza analizei stării de tensiuni la vârful fisurii. Această analiză, în general, se face aplicând metode analitice (funcții de variabilă complexă, metoda colocației etc.), iar pentru cazurile uzuale de corpuri fisurate sunt date în literatură în compendii de soluții ale factorului de intensitate a tensiunii. Cele mai

cunoscute sunt compendiile lui Tada-Paris-Irwin (1985), respectiv Murakami (1987). Astăzi, se apelează tot mai mult la metode numerice (metoda elementelor finite, metoda mesh-free etc.) pentru determinarea expresiilor factorilor de intensitate a tensiunii pentru geometrii și solicitări complexe. Metodele experimentale ca tensometria electrică rezistivă, fotoelasticimetria, termoelasticimetria, sunt de asemenea utilizate pentru determinarea factorilor de intensitate a tensiunii pe corpuri reale cu fisuri, figura 1.9.

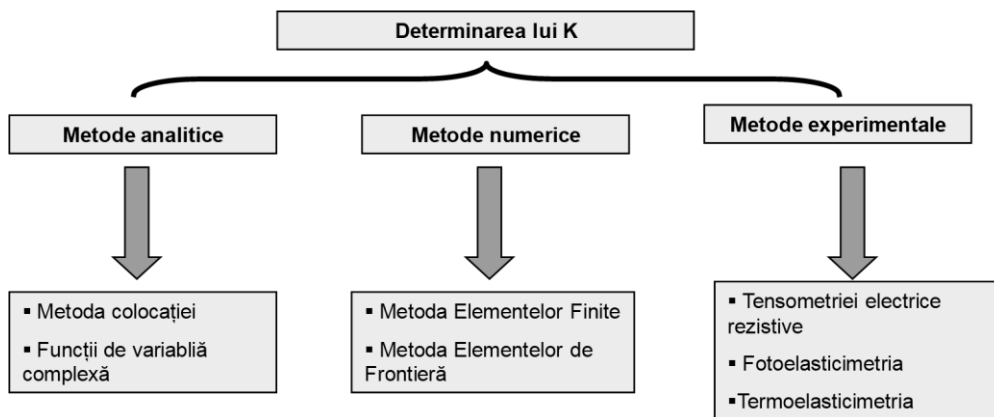


Figura 1.9. Metode de determinare a factorului de intensitate a tensiunii

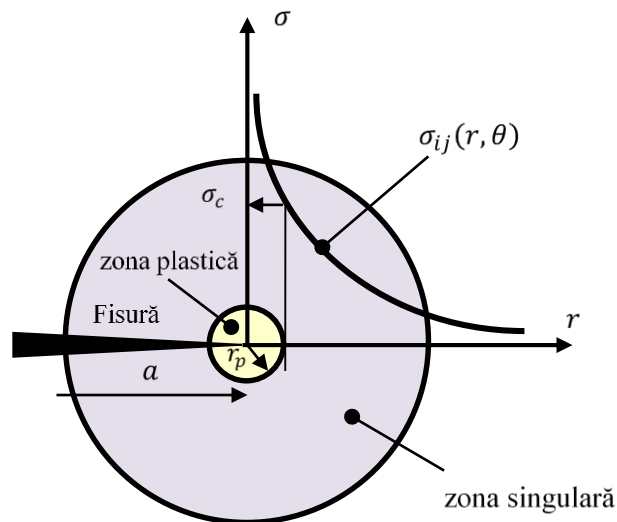


Figura 1.10. Domeniul de valabilitate a câmpului singular de tensiune

Domeniul de valabilitate al câmpului de tensiune din vecinătatea fisurii, relația (1.16), este reprezentat în figura 1.10.

Majoritatea materialelor folosite în aplicațiile ingineresti au o anumită limită de curgere σ_c , iar local aceasta limitează tensiunile extrem de mari generate de soluția singulară, creându-se o zonă plastică la vârful fisurii, caracterizată de raza zonei plastice r_p . Practica inginerescă indică faptul că reprezentarea câmpului de tensiune prin soluția singulară este validă pentru $r_p/a < 1/25$. Efectele de margine limitează exterior zona singulară, iar experimental s-a confirmat că raza exterioară a zonei singulare este de aproximativ 40-50% din lungimea fisurii a .

1.2.5 Relația dintre G și K_I

Dacă avem în vedere expresiile lui G pentru starea plană de tensiune:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E}$$

și pentru starea plană de deformație:

$$G = (1 - \nu^2) \frac{\pi\sigma^2 a}{E}$$

precum și expresia lui $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$, obținem:

$$G = \frac{K_I^2}{2} \tag{1.18}$$

pentru starea plană de tensiune, respectiv

$$G = (1 - \nu^2) \frac{K_I^2}{E} \tag{1.19}$$

pentru starea plană de deformație.

1.2.6 Estimarea zonei plastice de la vârful fisurii

Dacă în relația (1.16) se consideră $r \rightarrow 0$ tensiunile tind spre infinit, obținându-se așa-zisa condiție de singularitate la vârful fisurii. În aceste zone în care tensiunile ating limita de curgere, materialul se deformează plastic, iar la vârful fisurii apare ceea ce se

denumește în mod curent o enclavă plastică. Vom analiza inițial variația tensiunii σ_y în planul fisurii ($\theta = 0$):

$$\sigma_y = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi r}} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \quad (1.22)$$

În figura 1.10 este indicată variația tensiunii σ_y în funcție de r , având la bază așa după cum s-a văzut, o analiză în domeniul liniar-elastic.

În condițiile unor materiale cu o comportare inițial elastică urmată de una ideal plastică, tensiunile la vârful fisurii nu pot depăși limita de curgere.

Punând condiția ca $\sigma_y = \sigma_c$ se ajunge la o primă estimare pentru raza zonei plastice:

$$r_p = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{K_I}{\sigma_c} \right)^2 \quad (1.23)$$

La materialele cu deformații plastice limitate se pot aplica conceptele mecanicii ruperii în domeniul liniar-elastic, corectând lungimea fisurii cu raza zonei plastice. Acceptând că la vârful fisurii se formează o enclavă plastică de formă circulară și că tensiunile în această zonă nu pot depăși limita de curgere, Irwin a introdus o corecție asupra dimensiunii enclavei plastice, având la bază o redistribuire a câmpului de tensiuni. Astfel s-a considerat formarea unei enclave plastice de formă circulară cu diametrul $2r_p$ și s-a propus ca lungimea efectivă a fisurii să fie $a_{ef} = a + \omega$, $\omega = r_p$, figura 1.11.

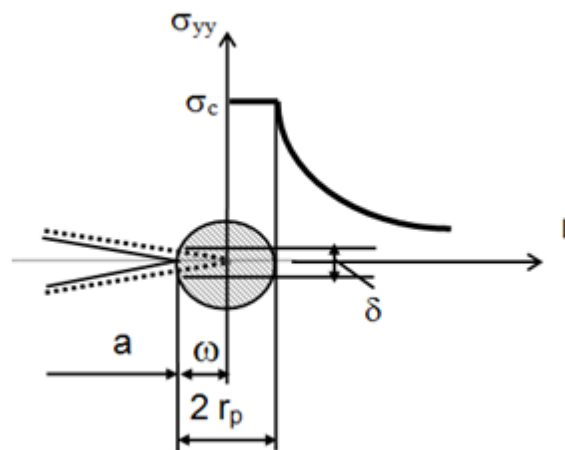


Figura 1.11. Domeniul de valabilitate a câmpului singular de tensiune

Factorul de intensitate a tensiunii devine în acest caz:

$$K_{ef} = \alpha(a_{ef})\sigma\sqrt{\pi a_{ef}} f\left(\frac{a_{ef}}{w}\right) \quad (1.24)$$

Pentru materialele la care deformațiile plastice și curgerea în vecinătatea fisurii sunt extinse există alți parametri definiți în cadrul mecanicii ruperii în domeniul elasto-plastic. Acești parametri sunt deplasarea de deschidere la vârful fisurii δ [mm], respectiv integrala de contur J [N/mm], dar nu sunt obiectul prezentului studiu.

1.2.7. Diagramele de cedare

O altă metodă de cuantificare a plasticității este diagrama de evaluare a cedării, *Failure Assessment Diagram*, propusă de Dowling și Townely (1975), care cuantifică cedarea între două stări limită, și anume, ruperea fragilă bazată pe factorul de intensitate a tensiunii și tenacitatea la rupere și colapsul plastic caracterizat de tensiunea σ și limita de curgere σ_c .

Diagrama de evaluare a cedării exprimă o legătură între K_r și S_r cu:

$$K_r = \frac{K_I}{K_{ef}} \quad (1.25)$$

unde K_I este factorul de intensitate a tensiunii, iar

$$K_{ef} = K_I \frac{\sigma_c}{\sigma} \left[\frac{8}{\pi^2} \ln \sec \left(\frac{\pi \sigma}{2 \sigma_c} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.26)$$

reprezintă o tenacitate efectivă la rupere care ține seama și de plasticitatea la vârful fisurii după modelul benzilor de deformație,

$$S_r = \frac{\sigma}{\sigma_c} \quad (1.27)$$

unde σ este tensiunea aplicată, iar σ_c limita de curgere a materialului.

Înlocuind relațiile (1.25) și (1.27) în (1.26) se obține:

$$K_r = S_r \left[\frac{8}{\pi^2} \ln \sec \left(\frac{\pi}{2} S_r \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (1.28)$$

care este ilustrată în figura 1.12. Curba din figură reprezintă locul geometric al punctelor pentru care se produce cedarea. Pentru componente și structuri din materiale fragile

$K_{ef} = K_{IC}$, deci $K_r = 1$. În schimb, pentru materiale ductile, care cedează prin colaps plastic, $S_r = 1$. Între aceste stări limită avem ruperi mixte, și $K_r, S_r < 1$. Toate punctele situate sub curba din figura 1.12 (marcate cu Δ) se află în zona sigură, iar cele aflate în exteriorul curbei (marcate cu \square) sunt în zona nesigură de cedare.

Pentru evaluarea unei structuri cu defecte trebuie trasată curba $K_r = f(S_r)$, apoi calculate valorile individuale (K_r, S_r) care se reprezintă în diagrama de evaluare a cedării.

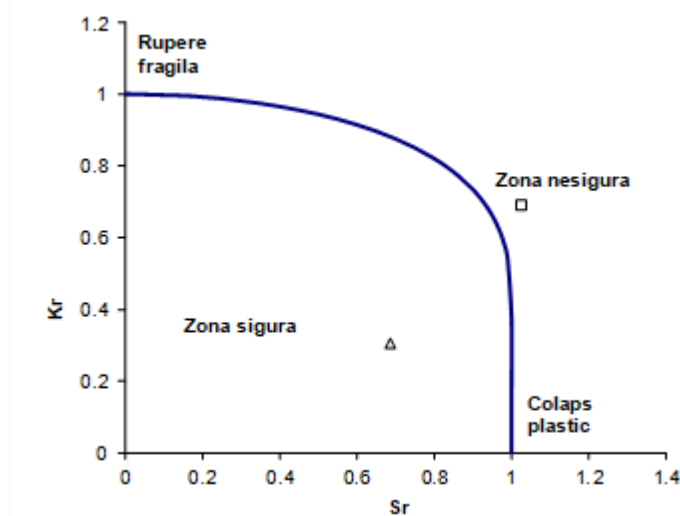


Figura 1.12. Diagrama de evaluare a cedării

1.3 Evaluarea siguranței în exploatare

Evaluarea siguranței în exploatare a elementelor de rezistență necesită o abordare care să țină cont de defectele și neomogenitățile materialului, de acumularea defectelor datorată solicitărilor variabile în timp, de inițierea și propagarea fisurilor, deci o abordare pe baza principiilor *Mecanicii ruperii materialelor*. Pornind de la aceste aspecte, în figura 1.13 sunt prezentate etapele necesare a fi parcurse pentru *evaluarea siguranței în exploatare a elementelor de rezistență*.

În prima etapă este necesară determinarea caracteristicilor de material, o analiză a încărcărilor și determinarea dimensiunilor defectelor. Pe lângă caracteristicile de material clasice (limita de curgere σ_c , $R_{p0,2}$; rezistența la rupere R_m ; alungirea la rupere A_m ; gătuirea la rupere Z ; reziliența KV etc.), este necesară determinarea caracteristicilor de material definite de Mecanicii ruperii: tenacitatea la rupere a materialului K_{IC}

(factorul critic de intensitate a tensiunii); δ_c deplasarea critică de deschidere la vârful fisurii; J_{IC} integrala critică de contur; r_p raza zonei plastice formate la vârful fisurii, Dumitru și Marșavina (2001).

Pentru a realiza un studiu cât mai precis trebuie considerate condițiile reale în care lucrează elementul de rezistență (efectul variațiilor de temperatură, efectul mediilor corozive etc.).

Determinarea dimensiunilor defectelor se face utilizând o metodă nedistructivă, de exemplu emisia acustică sau ultrasunete.

Etapa a doua constă în analiza numerică și experimentală a tensiunilor, deformațiilor și a parametrilor din Mecanica ruperii (factorii de intensitate a tensiunii K_I, K_{II}, K_{III} , deplasarea de deschidere la vârful fisurii δ , integrala de contur J_I). Această etapă este deosebit de importantă deoarece complexitatea geometrică a elementelor de rezistență și interacțiunea diferitelor încărcări impun determinarea numerică sau experimentală a parametrilor de Mecanica ruperii, soluțiile analitice existente fiind inoperante în cazurile de complexitate mare.

După aceste prime două etape se trag concluziile privind starea de tensiune și deformație din elementul de rezistență, se pun în evidență zonele cu concentrări puternice ale tensiunii, zone în care se urmărește în timpul exploatării, prin metode nedistructive, apariția unor fisuri și dezvoltarea acestora în timp. De asemenea, se face o primă evaluare privind posibilitatea ruperii fragile a elementului de rezistență, pe baza criteriilor Mecanicii ruperii. Astfel, dacă parametrii determinați numeric sau experimental, K_I pentru materiale cu comportare liniar-elastică, respectiv δ și J_I pentru materiale cu comportare elasto-plastică, depășesc valoarea tenacității la rupere se produce ruperea instabilă a elementului de rezistență.

Astfel, aplicând criteriul de rupere a mediilor elastice cu fisuri, exprimat prin factorul de intensitate a tensiunii, distingem situațiile:

$K_I \leq K_{IC}$ nu se produce ruperea instabilă a elementului de rezistență;

$K_I > K_{IC}$ se produce ruperea instabilă a elementului de rezistență.

În următoarea etapă se studiază acumularea defectelor, creșterea și propagarea fisurilor sub acțiunea ciclurilor de solicitare. Parametrii caracteristici în această etapă sunt viteza de creștere a fisurii sub acțiunea ciclurilor de solicitare $\frac{da}{dN}$ și variația factorului de intensitate a tensiunii ΔK .

Pe baza rezultatelor obținute se pot trage concluzii privind numărul de cicluri până la rupere N_c , lungimea critică a fisurii de la care se produce ruperea instabilă a_c , adică se estimează *durata de viață a elementului de rezistență* sau, apelând la un model

probabilistic, se poate evalua *probabilitatea de rupere a elementului de rezistență*. În final se face *evaluarea siguranței în exploatare a elementului de rezistență*.

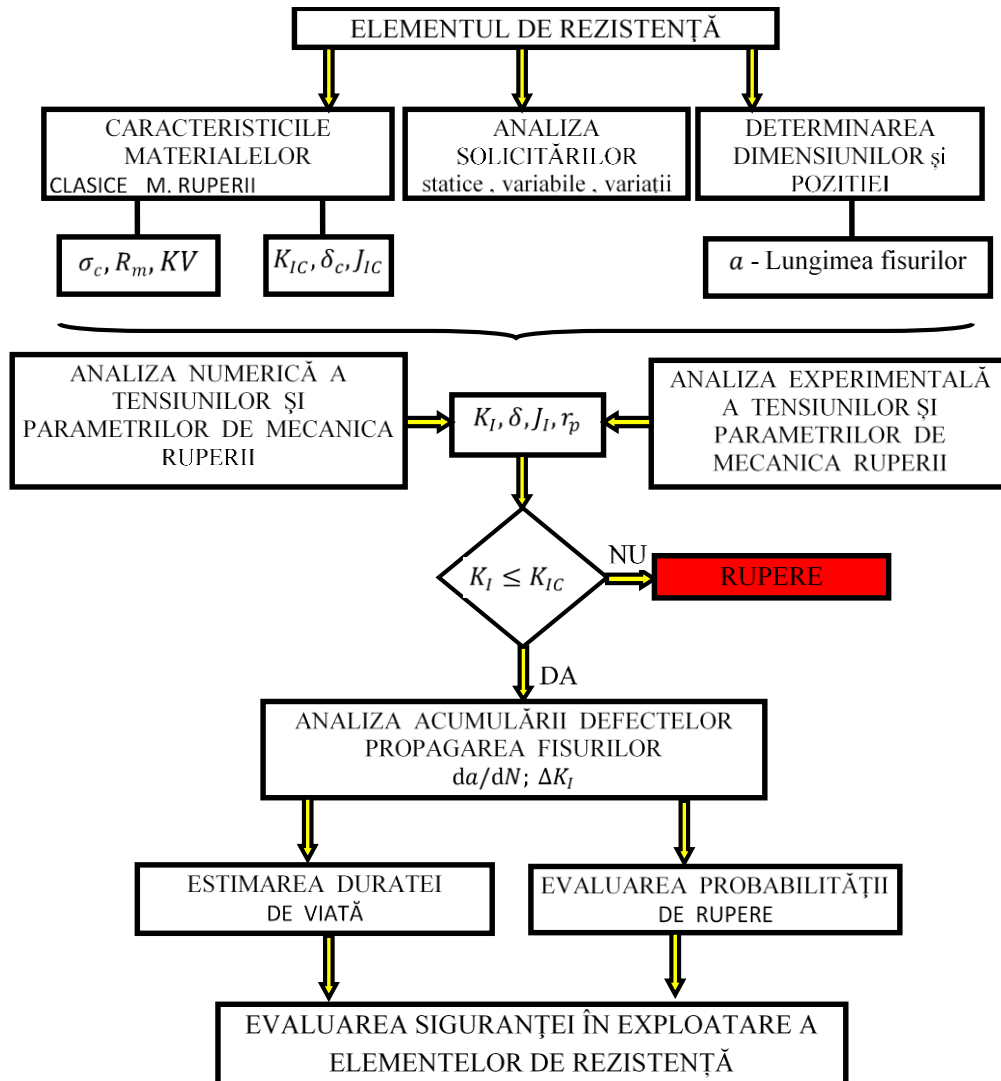


Figura 1.13. Etapele evaluării siguranței în exploatare a elementelor de rezistență

Bibliografie

- Anderson T.L. (1991) *Fracture Mechanics. Fundamentals and Applications*, CRC Press, Boca Raton.
- Broek, D. (1986) *Elementary engineering Fracture Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht.
- Cioclov, D. (1977) *Mecanica Ruperii Materialelor*, Editura Academiei, București.
- Constantinescu D. M. (2003) *Dezvoltări și aplicații în Mecanica ruperii și oboseală*, Editura Academiei Române, București.
- Dowling A.R., Townely C.H.A. (1975) The effects of defects on structural failure a two criteria approach, *International Journal of Pressure Vessels and Piping* 3, 77-137.
- Dumitru I., Marșavina L. (2001) *Introducere în Mecanica ruperii*, Editura Mirton, Timișoara.
- Ewalds H.L., Wanhill R. (1989) *Fracture Mechanics*, Edward Arnold, Delft.
- Griffith A.A. (1921) The phenomena of rupture and flow in solids, *Philosophical Transactions of Royal Society of London A* 221, 163-197.
- Hertzberger R. W. (1996) *Deformation and Fracture Mechanics of Engineering Materials*, 4th Edition, John Wiley & Sons.
- Irwin G.R. (1948) Fracture dynamics, in *Fracturing of Metals*, ASM, 147-166.
- Jansses M., Zuidema J., Wanhill R. (2002) *Fracture Mechanics*, Second Edition, Spon Press, Delft.
- Murakami Y. (1987) *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press, Oxford.
- Orowan, E. (1955) Energy criteria of fracture, *Welding Journal* 34, 1573-1605.
- Pastramă Șt. D. (2004) *Metode analitico-numeric în Mecanica ruperii*, Editura Printech, București.
- Tada H., Paris P., Irwin G. (1985) *The Stress Analysis Of Cracks Handbook*, Second Edition, St. Louis.

2. Criterii de rupere

2.1. Criteriul de rupere bazat pe factorul de intensitate a tensiunii

O fisură se propagă atunci când factorul de intensitate a tensiunii K_I atinge valoarea tenacității la rupere:

$$K_I = \alpha \sigma \sqrt{\pi a} f \left(\frac{a}{W} \right) \leq K_{Ic} \quad (2.1)$$

Deci o fisură, într-un material fragil, nu se propagă atâta timp cât factorul de intensitate a tensiunii de la vârful acesteia este mai mic decât factorul critic de intensitate a tensiunii K_{Ic} . Denumit și tenacitate la rupere, reprezintă o caracteristică de material și se determină experimental conform unor metodologii standardizate.

Aplicarea relației (2.1) implică următoarele:

- selecția materialelor din care sunt executate piesele sau elementele de rezistență, alegându-se materiale cu tenacitatea la rupere K_{Ic} cât mai ridicată, în condițiile unei temperaturi date;
- nivelul de solicitare al piesei trebuie să fie diminuat prin reducerea tensiunii nominale, pentru evitarea pe cât posibil ca efectul local al concentrărilor de tensiune să se manifeste în zona fisurată;
- controlul prin analize nedistructive a evoluției fisurii, la anumite intervale de timp.

La cele menționate mai sus se adaugă faptul că materialul trebuie să fie omogen și izotrop având o comportare inițială liniar-elastică urmată de una ideal-plastică. Concentrarea tensiunii la vârful fisurii conduce la o plastifiere locală, prin formarea unei enclave plastice. Este necesar ca această enclavă plastică să fie extrem de restrânsă în comparație cu lungimea fisurii, respectiv dimensiunile piesei, pentru a nu influența distribuția tensiunilor elastice date de relațiile (1.16).

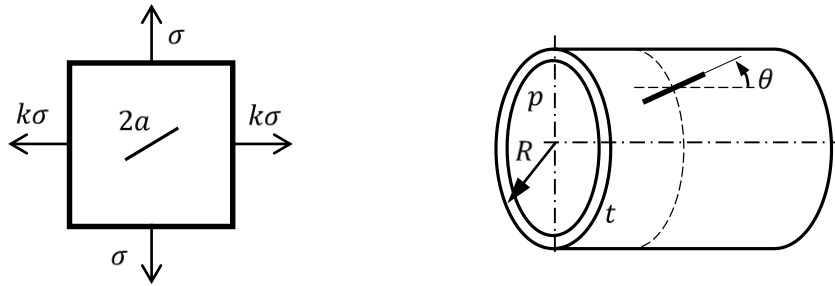
Mecanica ruperii materialelor în domeniul liniar-elastic este deci aplicabilă numai dacă enclava plastică este foarte mică, ceea ce impune ca piesele să aibă dimensiuni cu mult superioare acestei zone, care se exprimă prin raportul K_{Ic}/σ_c . În acest sens trebuie avute în vedere și prevederile standardelor care impun respectarea condiției stării plane de deformare la determinarea experimentală a factorului critic de intensitate a tensiunii K_{Ic} , exprimată prin condiția:

$$B, a \geq 2,5 \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (2.2)$$

Criteriul (2.1) poate fi aplicat doar corpurilor fisurate sollicitate în modul I. În cazul în care sollicitarea se produce în modul mixt I+II, figura 2.1, criteriul de rupere reprezintă o relație între factorii de intensitate ai tensiunii K_I, K_{II} și tenacitatea la rupere K_{Ic} :

$$f(K_I, K_{II}, K_{Ic}) = 0 \quad (2.3)$$

iar unghiul sub care se propagă fisura se notează θ_c .



a). placă sollicitată biaxial cu fisură înclinată b). tub cu fisură înclinată sollicitat cu presiune interioară

Figura 2.1. Cazuri de sollicitare în modul mixt

În general, pentru a determina o relație de tipul (2.3), se aplică criteriile fenomenologice, precum, maximul tensiunii circumferențiale, maximul forței de extensie a fisurii, etc. care vor fi prezentate în continuare, iar aprecierea ruperii se face pe baza unei diagrame de rupere de forma celei din figura 2.2.

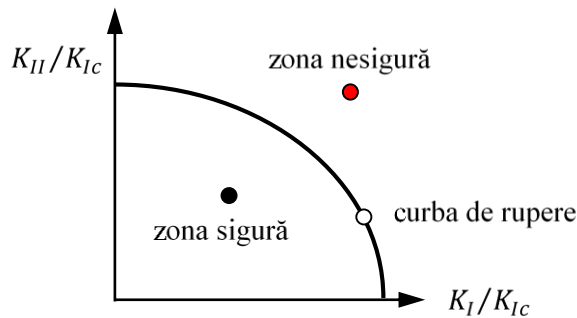


Figura 2.2. Diagrama de rupere

Un punct aflat în interiorul curbei de rupere este în zona sigură, iar pentru un punct aflat în exteriorul curbei de rupere se produce propagarea instabilă a fisurii.

2.2. Criteriul tensiunii circumferențiale maxime (criteriul MTS)

Criteriul tensiunii circumferențiale maxime denumit și *criteriul MTS* (*maximum tangential stress*) a fost introdus de Erdogan și Sih (1963) la analiza extensiei fisurii într-o stare bidimensională de solicitare. A fost validat experimental pe plăci cu fisură străpunsă înclinată, realizate din plexiglas (PMMA) și solícitate la întindere uniaxială.

Ipotezele introduse de criteriul MTS pentru extensia fisurii în materialele fragile au fost formulate astfel, Gdoutos (1990) și Constantinescu (2003):

(i) de la vârful inițial, extensia fisurii se produce în direcția radială definită de unghiul critic $\theta = \theta_c$ pe care tensiunea σ_θ devine maximă;

(ii) extensia prin propagarea fisurii începe când tensiunea σ_θ maximă atinge o valoare critică σ_c egală cu rezistența de rupere la întindere monoaxială.

Ipotezele se exprimă matematic prin relațiile următoare:

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0 \quad (2.4)$$

și

$$\sigma_\theta(\theta_c) = \sigma_c \quad (2.5)$$

Dacă se rețin doar termenii singulari, atunci tensiunile la vârful fisurii, exprimate în coordonatele polare r și θ , sunt date de relațiile:

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] \quad (2.6a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) \quad (2.6b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] \quad (2.6c)$$

cu $\sigma_z = 0$ pentru starea plană de tensiune, respectiv $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)$ pentru starea plană de deformație.

Unghiul critic θ_c de extensie a fisurii se determină din relația (2.6b) în baza ipotezei (2.4) ca soluție a ecuației:

$$K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (2.7)$$

Se observă că, în direcția θ_c de extensie a fisurii, tensiunea circumferențială σ_θ este o tensiune normală principală, iar tensiunea tangențială $\tau_{r\theta}$ se anulează.

Pentru calcul tensiunii σ_θ din relația (2.6b), pe lângă valoarea unghiului critic θ_c , se introduce și o rază critică r_c măsurată de la vârful inițial al fisurii. Pentru a depăși acest neajuns, se acceptă ipoteza că fisura se extinde în modul mixt când tensiunea σ_θ atinge aceeași valoare ca și în modul I echivalent, Gdoutos (1990). Astfel, pentru $K_I = K_{Ic}$, $K_{II} = 0$ și $\theta_c = 0$, se obține:

$$\sqrt{2\pi r_c} \sigma_c = K_{Ic} \quad (2.8)$$

iar condiția ruperii fragile în modul mixt I+II devine:

$$\cos \frac{\theta_c}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta_c}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_c \right) = K_{Ic} \quad (2.9)$$

În modul mixt, combinația între modul I și II este caracterizată prin parametrul adimensional M^e , introdus de Shih (1974):

$$M^e = \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{K_I}{K_{II}} \right) \quad (2.10)$$

Pentru modul I de solicitare ($K_I \neq 0$, $K_{II} = 0$, $M^e = 1$) criteriul MTS estimează că extensia fisurii se produce sub unghiul $\theta_c = 0^\circ$, adică în planul fisurii inițiale, iar factorul de intensitate a tensiunii $K_I = K_{Ic}$. În schimb, pentru modul II de solicitare ($K_I = 0$, $K_{II} \neq 0$, $M^e = 0$) extensia fisurii se produce în condițiile:

$$\theta_c = -\arccos(1/3) = -70,52^\circ, \quad K_{II} = K_{IIc} = \sqrt{3/4} K_{Ic} = 0,866 K_{Ic} \quad (2.11)$$

Din ecuația (2.4), dacă se introduce parametrul M^e definit de (2.10), se obține diagrama de variație a unghiului critic θ_c de extensie a fisurii (figura 2.3). De asemenea, eliminând unghiul θ_c în ecuațiile (2.7) și (2.9) rezultă diagrama de rupere în modul mixt (figura 2.4).

Datorită simplității sale criteriul MTS a fost utilizat pe larg în prezentarea și analiza rezultatelor experimentale. Acuratețea în estimarea ruperii fragile în modul mixt a fost examinată pentru o serie de materiale (PMMA, piatră, alumina) și tipuri de epruvete (epruvete de încovoiere în 4 puncte, disc brazilian cu fisură centrală, semidisc cu fisură solicitat la încovoiere în 3 puncte).

Astfel, o serie de rezultate experimentale au validat aplicabilitatea criteriului MTS la evaluarea ruperii fragile în modul mixt I+II, de exemplu cele publicate de Maccagno și Knott (1989), Mahajah și Ravi-Chandar (1989). Spre deosebire de aceste studii, numeroase alte rezultate experimentale nu au validat acuratețea criteriului MTS în evaluarea ruperii fragile în modul mixt, îndeosebi la predominanța modului II de solicitare. Sunt amintite în acest sens studiile publicate de Williams și Ewing (1972),

Suresh ș.a. (1990), Lim ș.a. (1994), Khan și Al-Shayea (2000). Aceste rezultate demonstrează că tensiunile nesingulare pot juca un rol important în stabilirea condițiilor critice de extensie a fisurii în modul mixt de solicitare.

O generalizare a criteriului MTS (*generalized maximum tangential stress criterion* sau *criteriul GMTS*), care ia în considerare efectul primilor doi termeni din expresia tensiunii circumferențiale σ_θ , a fost propusă de Smith ș.a. (2001), (2006).

2.3. Generalizarea criteriului tensiunii circumferențiale maxime (criteriul GMTS)

Tensiunile elastice la vârful fisurii, dacă se reține și primul termen nesingular, exprimate în coordonatele polare r și θ sunt date de relațiile, Williams (1957):

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \left(1 + \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) + K_{II} \left(\frac{3}{2} \sin \theta - 2 \tan \frac{\theta}{2} \right) \right] + T \cos^2 \theta \quad (2.12a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right) + T \sin^2 \theta \quad (2.12b)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] - T \sin \theta \cos \theta, \quad (2.12c)$$

unde tensiunea T reprezintă termenul nesingular. Pentru modul I de solicitare, în planul fisurii inițiale, adică la $\theta = 0$, termenul nesingular $T \sin^2 \theta$ din expresia tensiunii circumferențiale σ_θ se anulează. Așadar, în acest caz și în baza criteriului MTS, tensiunile nesingulare T nu schimbă condițiile critice de extensie a fisurii inițiale la cedarea prin rupere fragilă. Dimpotrivă, în cazul modului mixt I+II de solicitare, tensiunile nesingulare T nu sunt nule pe o direcție $\theta \neq 0$ și astfel modifică condițiile critice de extensie a fisurii inițiale.

Dacă se consideră și efectul tensiunii nesingulare T , ipoteza (2.4) devine:

$$[K_I \sin \theta + K_{II} (3 \cos \theta - 1)] - \frac{16T \sqrt{2\pi r_c}}{3} \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta = 0 \quad (2.13)$$

Pentru raza critică măsurată de la vârful fisurii $r = r_c$, din ecuația (2.13) se determină unghiul critic θ_c de extensie a fisurii. Cei trei parametri K_I , K_{II} și T de care depinde soluția ecuației (2.13) caracterizează geometria solidului cu fisură și configurația de încărcare.

Cu direcția critică θ_c de extensie stabilită din ecuația (2.13), condiția critică de propagare a fisurii se determină din (2.12b):

$$\sqrt{2\pi r_c} \sigma_c = \cos \frac{\theta_c}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta_c}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_c \right) + \sqrt{2\pi r_c} T \sin^2 \theta_c \quad (2.14)$$

unde σ_c reprezintă valoarea critică a tensiunii circumferențiale σ_θ la raza critică r_c . Pentru modul I de solicitare ($K_{II} = 0$, $T = 0$ și $\theta_c = 0$), K_I egalează valoarea tenacității K_{Ic} , iar ecuația (2.14) devine și în acest caz:

$$\sqrt{2\pi r_c} \sigma_c = K_{Ic} \quad (2.15)$$

unde r_c , σ_c și K_{Ic} sunt caracteristici de material. Dacă rezultatul (2.15) se introduce în ecuația (2.14), se obține condiția critică de propagare a fisurii:

$$\cos \frac{\theta_c}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta_c}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_c \right) + \sqrt{2\pi r_c} T \sin^2 \theta_c = K_{Ic} \quad (2.16)$$

ecuațiile (2.13) și (2.16) reprezentând formularea matematică a criteriului GMTS. Astfel, predicția condițiilor critice ale ruperii fragile se realizează pentru oricare combinație a modului mixt I+II în funcție de trei parametri K_I , K_{II} și T .

Efectul tensiunilor nesingulare T în determinarea condițiilor critice de extensie a fisurii la ruperea materialelor fragile a fost studiat de Smith ș.a. (2001) prin introducerea raportului de biaxialitate B :

$$B = \frac{T\sqrt{\pi a}}{K_{ef}} = \frac{T\sqrt{\pi a}}{\sqrt{K_I^2 + K_{II}^2}} \quad (2.17)$$

unde K_{ef} este factorul efectiv de intensitate a tensiunii. Dacă se consideră lungimea fisurii a și se adaugă notația $\alpha = \sqrt{2r_c/a}$, atunci ecuațiile (2.13) și (2.16) se modifică, astfel:

$$[K_I \sin \theta_c + K_{II}(3 \cos \theta_c - 1)] - \frac{16B\alpha}{3} K_{ef} \sin \frac{\theta_c}{2} \cos \theta_c = 0 \quad (2.18)$$

și

$$\cos \frac{\theta_c}{2} \left(K_I \cos^2 \frac{\theta_c}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_c \right) + B\alpha K_{ef} \sin^2 \theta_c = K_{Ic} \quad (2.19)$$

unde parametrul $B\alpha$ este dat de relația:

$$B\alpha = \frac{T}{\sigma_c} \frac{K_{Ic}}{K_{ef}} \quad (2.20)$$

În intervalul de valori $-0,6 < B\alpha < 0,375$, Smith ș.a. (2001) au stabilit o soluție exactă pentru condițiile critice de extensie a fisurii în modul mixt I+II.

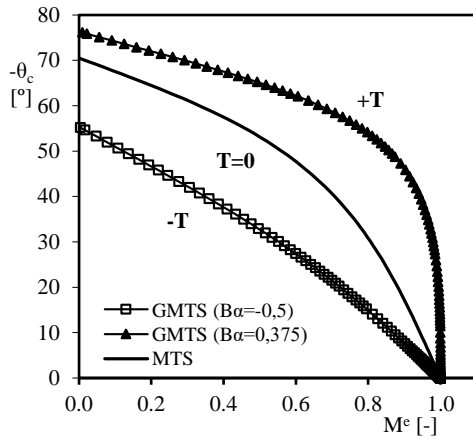


Figura 2.3. Variația unghiului θ_c cu M^e (efectul tensiunii nesingulare T), Smith ș.a. (2001)

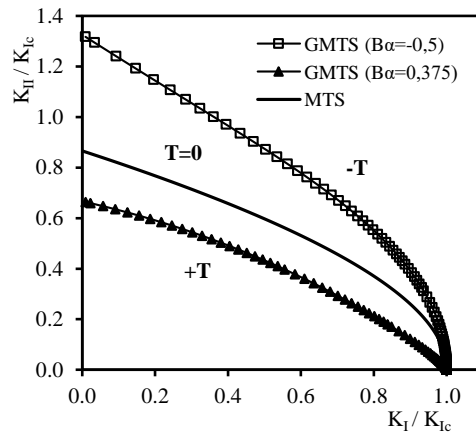


Figura 2.4. Diagrama de rupere în modul mixt (efectul tensiunii nesingulare T), Smith ș.a. (2001)

Rezultatele ilustrate în figurile 2.3 și 2.4 sunt sugestive pentru comparația predicțiilor după cele două criterii de rupere:

- pentru $B\alpha = 0$, adică $T = 0$, soluția corespunde criteriului MTS;
- în modul mixt I+II tensiunile nesingulare T influențează condițiile critice de extensie a fisurii;
 - în valori absolute, unghiul critic θ_c crește pentru tensiuni nesingulare T pozitive și scade pentru tensiuni nesingulare T negative;
 - în modul II de solicitare, valoarea critică a factorului de intensitate a tensiunii K_{IIc} crește pentru tensiuni nesingulare T negative și crește pentru tensiuni nesingulare T pozitive.

Dacă $0,375 < B\alpha$, adică pentru valori ridicate ale tensiunii T sau raze mari ale zonei de proces r_c , câteva rezultate surprinzătoare sunt menționate, Smith ș.a. (2001), Smith ș.a. (2006):

- în modul I de solicitare unghiul critic θ_c nu mai coincide cu planul fisurii, tensiuni circumferențiale maxime producându-se de ambele părți ale planului fisurii;
- pentru ambele moduri de solicitare I și II are loc o reducere a tenacității determinate în aceste condiții.

De curând, criteriul GMTS a fost utilizat pentru analiza rezultatelor experimentale și predicția condițiilor critice ale ruperii fragile în modul mixt I+II. Se

amintește studiul lui Ayatollahi și Aliha (2005) realizat pe discul brazilian cu fisură centrală înclinată (CBD), solicitat la compresiune pe direcția diametrului, pentru calcar și gresie. Epruveta de tip semidisc cu fisură laterală verticală solicitată la încovoiere în 3 puncte (ASCB) a fost introdusă de Ayatollahi ș.a. (2011) pentru studiul ruperii fragile în modul mixt I+II pe PMMA. Epruveta ASCB și criteriul GMTS au fost utilizate de Negru ș.a. (2014) și Rus (2013) pentru evaluarea ruperii fragile a materialelor poliuretanic. La predominanța modului II, predicțiile bazate pe criteriul GMTS sunt mai precise.

2.4. Criteriul energiei specifice de deformație minimă (criteriul S)

Criteriul energiei specifice de deformație minimă, cunoscut sub denumirea de criteriul S (*strain energy density failure criterion*), a fost propus la începutul anilor '70 de Sih (1973, 1974)). Criteriul S nu are ca premisă existența unui defect inițial de tip fisură și, de asemenea, se aplică la evaluarea cedărilor atât prin rupere fragilă cât și prin curgere plastică, abordând procesul de cedare de la stadiul de inițiere la propagarea stabilă a fisurii și până la ruperea finală, Gdoutos (1990).

Mărimea utilizată de criteriul S este energia de deformație conținută în unitatea de volum dW/dV , denumită funcția energiei specifice de deformație:

$$\frac{dW}{dV} = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \quad (2.21)$$

unde σ_{ij} și ε_{ij} sunt componentele tensiunii și deformației.

Funcția energiei specifice de deformație este într-o stare generală de tensiune, pentru un material omogen și izotrop cu un comportament liniar-elastic, este dată prin relația:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{\nu}{E} (\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x) + \frac{1}{2\mu} (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \quad (2.22)$$

Legătura între caracteristicile elastice ale materialului este $E = 2\mu(1 + \nu)$. Energia specifică totală de deformație dW/dV definită prin (2.22) conține atât energia specifică de modificare a volumului $(dW/dV)_V$ cât și energia specifică distorsionară $(dW/dV)_d$, cele două componente inseparabile în procesul de degradare a materialului. În fapt, separarea energiei totale în cele două componente implică liniaritatea și superpoziția tensiunilor și deformațiilor.

Pentru problemele plane, funcția dW/dV dată de (2.22) se simplifică, astfel:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{4\mu} \left[\frac{\kappa + 1}{4} (\sigma_x + \sigma_y)^2 - 2(\sigma_x \sigma_y - \tau_{xy}^2) \right] \quad (2.23)$$

unde constanta elastică κ este $\kappa = 3 - 4\nu$ pentru starea plană de deformație, respectiv $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ pentru starea plană de tensiune.

Sih și Ho (1991) au introdus expresia generală pentru funcția energiei specifice de deformație, aplicabilă concentratorilor singulari de tipul creștătură V :

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S}{r^{1-m}}, \quad m \geq 0 \quad (2.24)$$

unde S este factorul energiei specifice de deformație, $m = 2\lambda - 1$ cu λ ordinul singularității câmpului de tensiune (funcție de deschiderea unghiulară a creștăturii), iar r este o rază finită măsurată de la vârful creștăturii (sau punctul de inițiere a ruperii).

În cazul solidului cu fisură, relația de definiție (2.24) se simplifică:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{S}{r} \quad (2.25)$$

deoarece $\lambda = 0,5$ și $m = 0$. Factorul S astfel definit $r(dW/dV)$ reprezintă energia eliberată local pentru extensia fisurii cu segmentul r . Singularitatea de tipul $1/r$ este independentă de geometria fisurii (fisură de suprafață, de colț sau interioară) și legea constitutivă a materialului (comportament liniar-elastic, neliniar vâscos, plastic etc.).

Ipotezele criteriului S au fost enunțate de către Sih (1974) și Gdoutos (1990), astfel:

(i) punctul de inițiere a cedării prin rupere fragilă este determinat de minimumul energiei specifice de deformație $(dW/dV)_{min}$, iar al cedării prin curgere este determinat de maximumul energiei specifice de deformație $(dW/dV)_{max}$;

(ii) cedarea prin rupere fragilă se produce atunci când energia specifică de deformație $(dW/dV)_{min}$, respectiv $(dW/dV)_{max}$ pentru cedarea prin curgere, atinge valoarea critică corespunzătoare;

(iii) fisura se extinde treptat, pas cu pas, cu segmentele r_1, r_2, \dots, r_c

$$\left(\frac{dW}{dV} \right)_c = \frac{S_1}{r_1} = \frac{S_2}{r_2} = \dots = \frac{S_c}{r_c} \quad (2.26)$$

propagarea instabilă a fisurii sau curgerea plastică se produce atunci când ligamentul atinge o valoare critică.

Criteriul S a fost validat experimental pentru o serie de probleme practice: ruperea fragilă a materialelor compozite, cedarea plăcilor cu fisuri, cedarea conductelor cu fisuri circumferențiale, ruperea dinamică sau ductilă, propagarea fisurii de oboseală, Gdoutos (1990). O comparație a criteriilor MTS și S în predicția ruperii fragile în modul mixt I+II, pe epruvete ASCB realizate din două materiale poliuretanică cu densități diferite, a fost publicată de Negru ș.a. (2014), Rus (2013).

Problema bidimensională liniar-elastică a corpului cu fisură. Din relația (2.23) în care a introdus tensiunile din zona de la vârful fisurii exprimate în coordonate carteziene, Sih (1973, 1974) a obținut funcția energiei specifice de deformație în forma pătratică:

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{r} (a_{11}k_I^2 + 2a_{12}k_Ik_{II} + a_{22}k_{II}^2) \quad (2.27)$$

unde $k_I = K_I/\sqrt{\pi}$ și $k_{II} = K_{II}/\sqrt{\pi}$, așadar în problema considerată sunt cunoscuți factorii de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} . Coeficienții a_{ij} ($i, j = 1, 2$) depind de constantele elastice μ și κ și sunt definiți prin funcții trigonometrice de unghiul θ :

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{16\mu} (1 + \cos\theta)(\kappa - \cos\theta) \\ a_{12} &= \frac{1}{16\mu} \sin\theta [2\cos\theta - (\kappa - 1)] \\ a_{22} &= \frac{1}{16\mu} [(1 - \cos\theta)(\kappa + 1) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1)] \end{aligned} \quad (2.28)$$

În continuare, pentru o grosime a elementului de volum egală cu unitatea, factorul energiei specifice de deformație S dat prin definiția (2.25) se scrie în relația:

$$S = a_{11}k_I^2 + 2a_{12}k_Ik_{II} + a_{22}k_{II}^2 \quad (2.29)$$

fiind sensibil la schimbarea direcției, prin dependența de unghiul θ .

Pentru ruperea fragilă a corpurilor cu fisuri, caz în care extensia și instabilitatea finală se suprapun, ruperea producându-se brusc, primele două ipoteze ale criteriului S se formulează matematic:

(i) extensia fisurii se produce pe direcția determinată de unghiul critic θ_c , pentru care factorul S atinge o valoare minimă

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial \theta^2} > 0 \quad (2.30)$$

(ii) extensia fisurii se produce atunci când factorul S atinge valoarea critică, pe direcția stabilită de unghiul θ_c

$$S_{min} = S(\theta_c) = a_{11}k_I^2 + 2a_{12}k_Ik_{II} + a_{22}k_{II}^2 = S_c \quad (2.31)$$

unde S_c este considerată o constantă de material, măsură a tenacității lui. Pentru modul I de solicitare, factorul critic S_c se exprimă în funcție de tenacitatea la rupere K_{Ic} :

$$S_c = \frac{(\kappa - 1)K_{Ic}^2}{\pi 8\mu} \quad (2.32)$$

iar în cazul stării plane de deformație prin relația:

$$S_c = \frac{(1 + \nu)(1 - 2\nu)K_{Ic}^2}{\pi 2E} \quad (2.33)$$

Deoarece factorul S definit prin (2.29) încetează să mai fie valid pentru o rază r infinit mică $r \rightarrow 0$, Sih (1974) propune determinarea lui la o distanță critică r_c , măsurată de la vârful fisurii.

Dacă factorul S din (2.26) se înlocuiește în (2.30), se stabilește direcția de extensie a fisurii ca soluție a sistemului de ecuații:

$$\begin{aligned} K_I^2[2\cos\theta - (\kappa - 1)]\sin\theta + 2K_IK_{II}[2\cos 2\theta - (\kappa - 1)\cos\theta] + K_{II}^2(\kappa - 1 - 6\cos\theta)\sin\theta &= 0 \\ K_I^2[2\cos 2\theta - (\kappa - 1)\cos\theta] + 2K_IK_{II}[(\kappa - 1)\sin\theta - 4\sin 2\theta] + K_{II}^2[(\kappa - 1)\cos\theta - 6\cos 2\theta] &> 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ecuațiile (2.32) și (2.34) reprezintă formularea matematică a criteriului S pentru solicitarea în modul mixt I+II a unui corp cu fisură. Într-o aplicație dată, cu expresiile cunoscute ale factorilor de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} , din ecuațiile (2.34) se determină direcția de extensie a fisurii stabilită prin unghiul θ_c . Din ecuația (2.31) se obține sarcina aplicată pentru care S_{min} atinge valoarea critică S_c .

Condițiile critice de extensie a fisurii după criteriul S sunt ilustrate în figurile 2.5 și 2.6, pentru două materiale poliuretanică cu densități și coeficienți de contracție transversală diferiți: Necuron 1020 cu $\nu = 0,34$ și Necuron 651 cu $\nu = 0,28$.

Rezultatele ilustrate sunt sugestive pentru comparația predicțiilor după criteriile MTS și criteriul S :

- soluția criteriului S depinde de valoarea coeficientului lui Poisson și nu coincide cu soluția dată de criteriul MTS;

- în modul II de solicitare, valorile unghiului critic de extensie a fisurii sunt $\theta_c = -83,8^\circ$ pentru $\nu = 0,34$ și $\theta_c = -81,5^\circ$ pentru $\nu = 0,28$, în comparație cu predicția $\theta_c = -70,5^\circ$ a criteriului MTS;

- în modul II de solicitare, factorul critic de intensitate a tensiunii este $K_{IIc} = 0,89K_{Ic}$ pentru $\nu = 0,34$ și $K_{IIc} = 0,98K_{Ic}$ pentru $\nu = 0,28$, în comparație cu $K_{IIc} = 0,866K_{Ic}$ după criteriul MTS.

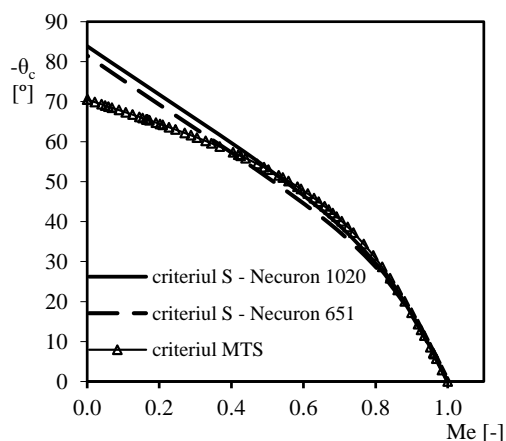


Figura 2.5. Variația unghiului θ_c cu M^e , Rus (2013)

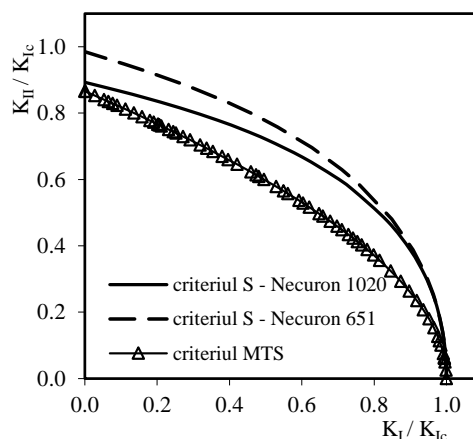


Figura 2.6. Diagrama de rupere în modul mixt, Rus (2013)

Condițiile critice de extensie a fisurii după criteriul S sunt ilustrate în figurile 2.5 și 2.6, pentru două materiale poliuretanice cu densități și coeficienți de contracție transversală diferiți: Necuron 1020 cu $\nu = 0,34$ și Necuron 651 cu $\nu = 0,28$.

Rezultatele ilustrate sunt sugestive pentru comparația predicțiilor după criteriile MTS și criteriul S:

- soluția criteriului S depinde de valoarea coeficientului lui Poisson și nu coincide cu soluția dată de criteriul MTS;

- în modul II de solicitare, valorile unghiului critic de extensie a fisurii sunt $\theta_c = -83,8^\circ$ pentru $\nu = 0,34$ și $\theta_c = -81,5^\circ$ pentru $\nu = 0,28$, în comparație cu predicția $\theta_c = -70,5^\circ$ a criteriului MTS;

- în modul II de solicitare, factorul critic de intensitate a tensiunii este $K_{IIc} = 0,89K_{Ic}$ pentru $\nu = 0,34$ și $K_{IIc} = 0,98K_{Ic}$ pentru $\nu = 0,28$, în comparație cu $K_{IIc} = 0,866K_{Ic}$ după criteriul MTS.

2.5. Criteriul forței maxime de extensie a fisurii (G_{\max})

Hussain ș.a. (1974) au investigat extinderea infinitezimală a unei fisuri orientate cu unghiul θ și au exprimat forța de extensie a fisurii G în funcție de factorii de intensitate ai tensiunii K_I și K_{II} , astfel:

$$G(\theta) = \frac{1}{E'} (K_I^2(\theta) + K_{II}^2(\theta)) \quad (2.35)$$

Înlocuind expresiile factorilor de intensitate ai tensiunii:

$$\begin{cases} K_I(\theta) \\ K_{II}(\theta) \end{cases} = \frac{4}{3 + \cos^2 \theta} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta}{\pi} \\ 1 + \frac{\theta}{\pi} \end{pmatrix}^{\frac{\theta}{2\pi}} \begin{cases} K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ K_{II} \cos \theta - \frac{1}{2} K_I \sin \theta \end{cases} \quad (2.36)$$

rezultă:

$$G(\theta) = \frac{4}{E'} \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta}{\pi} \\ 1 + \frac{\theta}{\pi} \end{pmatrix}^{\frac{\theta}{2\pi}} [K_I^2 (1 + 3 \cos^2 \theta) + 8 K_I K_{II} \sin \theta \cos \theta + K_{II}^2 (9 - 5 \cos^2 \theta)] \quad (2.37)$$

Unghiul direcției de propagare a fisurii se obține determinând maximum funcției $G(\theta)$:

$$\left. \frac{\partial G}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_c} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=\theta_c} < 0 \quad (2.38)$$

Extensia fisurii se produce atunci când $G(\theta_c)$ atinge tenacitatea la rupere exprimată prin valoarea critică G_{Ic} :

$$G(\theta_c) = G_{Ic} = \frac{K_{Ic}^2}{E} \quad (2.39)$$

Astfel, se obține soluția:

$$4 \left(\frac{1}{3 + \cos^2 \theta} \right)^2 \begin{pmatrix} 1 - \frac{\theta}{\pi} \\ 1 + \frac{\theta}{\pi} \end{pmatrix}^{\frac{\theta}{2\pi}} \left[\left(\frac{K_I}{K_{Ic}} \right)^2 (1 + 3 \cos^2 \theta_c) + 8 \left(\frac{K_I K_{II}}{K_{Ic}^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \left(\frac{K_{II}}{K_{Ic}} \right)^2 (9 - 5 \cos^2 \theta) \right] = 1 \quad (2.40)$$

Un criteriu de cedare similar a fost propus de Chang ș.a. (2006) pentru modul mixt generalizat.

2.6. Criteriul factorului echivalent de intensitate a tensiunii

Richard (1985, 2005) a introdus factorul echivalent de intensitate a tensiunii K_{ech} , drept parametrul pe baza căruia se evaluează ruperea fragilă (*Equivalent stress intensity factor criterion ESIF*):

$$K_{ech} = \frac{K_I}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{K_I^2 + 4(\alpha K_{II})^2} \leq K_{Ic} \quad (2.41)$$

unde $\alpha = K_{Ic}/K_{IIc}$, iar K_{Ic} și K_{IIc} sunt tenacitățile la rupere în modul I, respectiv modul II. Conform criteriului ESIF, fisura începe să se propage atunci când factorul echivalent de intensitate a tensiunii atinge valoarea tenacității la rupere.

Pentru direcția de propagare a fisurii, Richard propune o relație bazată pe un număr considerabil de rezultate experimentale:

$$\theta_c = \mp \left(155,5^\circ \frac{|K_I|}{|K_I| + |K_{II}|} \right) - 83,4^\circ \left(\frac{|K_I|}{|K_I| + |K_{II}|} \right)^2 \quad (2.42)$$

Criteriul ține cont de ambele tenacități la rupere K_{Ic} și K_{IIc} , din acest motiv este mai greu de aplicat. Dar, în același timp, criteriul este mai exact, cu estimări mai apropiate de rezultatele experimentale, Marșavina ș.a.(2014).

Bibliografie

Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M (2005) Cracked brazilian disc specimen subjected to mode II deformation, *Engineering Fracture Mechanics* 72, 493-503.

Ayatollahi M.R., Aliha M.R.M., Saghafi H. (2011) An improved semi-circular bend specimen for investigating mixed mode brittle fracture, *Engineering Fracture Mechanics* 78, 110-123.

Chang J., Xu J.-q., Mutoh Y. (2006) A general mixed-mode brittle fracture criterion for cracked materials, *Engineering Fracture Mechanics*, 73, 1249-1263.

Constantinescu D.M. (2003) *Dezvoltări și Aplicații în Mecanica Ruperii și Oboseală*, Editura Academiei Române, București.

Erdogan F., Sih G.C. (1963) On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *Journal of Fluids Engineering* 85(4), 519-525.

Gdoutos E.E. (1999) *Fracture Mechanics Criteria and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Hussain M. A., Pu S. L., Underwood J. (1974) Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II. In: *Fracture analysis*, P.C. Paris, G.R. Irwin (Editors), ASTM STP 560, Philadelphia, 2-28.

Khan K., Al-Shayea N.A. (2000) Effect of specimen geometry and testing method on mixed I-II fracture toughness of a limestone rock from Saudi Arabia, *Rock Mechanics and Rock Engineering* 33, 179-206.

Lim I.L., Johnston I.W., Choi S.K. (1994) Fracture testing of soft rock with semi-circular specimens under three-point bending. Part 2 Mixed-mode, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* 31, 185-197.

Maccagno T.M., Knott J.F. (1989) The fracture behaviour of PMMA in mixed modes I and II, *Engineering Fracture Mechanics* 34, 65-86.

Mahajah R.V., Ravi-Chandar K. (1989) An experimental investigation of mixed mode fracture, *International Journal of Fracture* 41, 235-252.

Marsavina L., Constantinescu D.M, Linul E., Apostol D.A., Voiconi T., Sadowski T. (2014) Refinements on fracture toughness of PUR foams, *Engineering Fracture Mechanics* 129, 54-66.

Negru R., Marşavina L., Filipescu H., Paşca N. (2013) Investigation of mixed mode I/II brittle fracture using ASCB specimen, *International Journal of Fracture* 181, 155-161.

Negru R., Marşavina L., Filipescu H.E. (2014) Evaluation of generalized MTS criterion for mixed-mode fracture of polyurethane materials, *12th International Conference on Fracture and Damage Mechanics, FDM 2013, 17-19 September, Sardinia, Italia 2013*, Key Engineering Materials vols. 577-578 (2014), 117-120.

Richard H. A. (1985) *Bruch Vorhersagen bei überlagerter normal- und schubbeanspruchung von rissen*, VDI-Verlag, Dusseldorf.

Richard H. A., Fulland M., Sander M. (2005) Theoretical crack path prediction, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 28, 3-12.

Rus H.E. (2013) *Investigarea ruperii fragile în modul mixt pe materiale poliuretane*, Editura Politehnica, Timişoara (Teză de Doctorat).

Shih C.F. (1974) Small-scale yielding analysis of mixed-mode plane strain crack problems, în: *Fracture Analysis* (ed. Paris P.C. şi Irwin G.R.) ASTM STP 560, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, USA, 187-210.

Sih G.C. (1973) Some basic problems in fracture mechanics and new concepts, *Engineering Fracture Mechanics* 5, 365-377.

Sih G.C. (1974) Strain-energy-density applied to mixed mode crack problems, *International Journal of Fracture* 10, 305-321.

Sih G.C., Ho J.W. (1991) Sharp notch fracture strength characterized by critical energy density, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 16, 179-214.

Smith D.J., Ayatollahi M.R., Pavier M.J. (2001) The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed-mode loading, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 24, 137-150.

Smith D.J., Ayatollahi M.R., Pavier M.J. (2006) On the consequences of T-stress in elastic brittle fracture, *Proceedings of The Royal Society A, Mathematical, Physical & Engineering Sciences* 462, 2415-2437.

Suresh S., Shih C.F., Morrone A., O'Dowd N.P. (1990) Mixed-mode fracture toughness of ceramic materials, *Journal of the American Ceramic Society* 73, 1257-1267.

Williams J.G., Ewing P.D. (1972) Fracture under complex stress-the angled crack problem, *International Journal of Fracture* 8, 441-446.

Williams M.L. (1957) On the stress distribution at the base of a stationary crack, *Journal of Applied Mechanics* 24, 109-114.

3. Calculul numeric al parametrilor de mecanica ruperii

3.1. Stadiul actual al utilizării metodelor numerice în mecanica ruperii

Creșterea performanțelor calculatoarelor electronice a facilitat dezvoltarea unor metode noi pentru calculul structurilor. Astfel s-a dezvoltat în ultimii 40 de ani o nouă disciplină numită în limba engleză "**Computational Mechanics**", concept introdus de Argyris (1960), care este de fapt o sinteză a mai multor discipline cu caracter analitic și numeric dintre care trebuie amintite: mecanica teoretică și aplicată, rezistența materialelor, teoria elasticității și plasticității, matematica aplicată și teoria aproximării, analiza numerică și programarea calculatoarelor. O ramură a acestei noi discipline se numește "**Computational Fracture Mechanics**", adică în traducere, Mecanica ruperii computațională, care se ocupă de modelarea și analiza numerică a problemelor care prezintă discontinuități geometrice de forma fisurilor. Pentru a demonstra interesul manifestat pe plan mondial față de această nouă ramură, o căutare pe motorul *Google* pentru "**Computational Fracture Mechanics**" a furnizat peste 550000 de rezultate. Aceiași căutare în anul 1998 a returnat peste 45.000 de adrese, ceea ce arată dinamica acestui nou domeniu de cercetare, Marșavina (1998). O mare parte dintre adresele returnate aparțin unor universități americane de prestigiu, precum Berkeley, Cornell University, Clarkson University, Lehigh University, Kansas State University, University of Illinois etc. și ale celor mai importante institute și laboratoare de cercetare americane (de exemplu laboratorul NASA de la Langley), dar și ale unor universități europene de tradiție, cum ar fi Oxford University, University of Glasgow, Wessex Institute of Technology etc.

Cu ajutorul acestor informații s-a putut contura nivelul actual al cercetărilor privind utilizarea metodelor numerice pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii. Principalele tendințe în acest sens sunt:

- utilizarea metodelor numerice pentru elaborarea unor programe cât mai performante de calcul a parametrilor de Mecanica ruperii;
- determinarea prin analiză numerică a unor soluții pentru calculul parametrilor de rupere și sintetizarea acestor soluții sub forma unor baze de date care sunt puse la dispoziția proiectanților și a inginerilor, care exploatează elemente și structuri de rezistență pentru efectuarea controlului în serviciu;
- Metoda Elementului Finit (MEF) este cea mai utilizată dintre metodele numerice de calcul a parametrilor din Mecanica ruperii. Totuși, la unele aplicații este

mai eficientă utilizarea Metodei Elementelor de Frontieră (MEFr), deoarece dimensiunea problemei se reduce cu o unitate. În ultimii 10 ani s-au dezvoltat și aplicat metodele "mesh - free" pentru simularea propagării fisurilor;

- calculul numeric al parametrilor din Mecanica ruperii se aplică elementelor de rezistență din domeniul aerospațial și aeronautic, din centralele nucleare și termoelectrice, construcțiile metalice, mașinilor și utilajelor grele din industriile constructoare de mașini, mineritului, la utilajele chimice etc.

3.2. Programe utilizate pentru calculul parametrilor din mecanica ruperii

Dată fiind complexitatea problemelor în care apar discontinuități geometrice de forma fisurilor, determinarea analitică a stării de tensiune și deformație, precum și a parametrilor caracteristici Mecanicii ruperii (factorul de intensitate a tensiunii K , integrala de contur J , etc.), se poate face doar într-un număr limitat de cazuri, luând în considerare unele ipoteze simplificatoare.

Pentru evaluarea parametrilor de Mecanica ruperii, la valori cât mai apropiate de situația reală, s-au dezvoltat programe de calcul. În general, aceste programe se bazează pe Metoda elementelor finite sau pe Metoda elementelor de frontieră.

La ora actuală programele de analiză cu elemente finite utilizate în aplicațiile de Mecanica Ruperii se împart în: programe generale, programe specializate de analiză a problemelor cu discontinuități geometrice de tipul fisurilor, alte programe pentru calculul parametrilor de Mecanica ruperii pe baza soluțiilor analitice.

Programele generale de analiză cu elemente finite, pe lângă analiza numerică a tensiunilor și deformațiilor, au posibilitatea definirii unor fisuri, programul calculând apoi parametrii caracteristici Mecanicii ruperii. Aceste programe sunt:

- **ADINA**, specializat pe analiză cu elemente finite în domeniul elasto-plastic, calculând integrala J , dar având și opțiuni de modelare a propagării fisurii sub acțiunea solicitărilor variabile.

- **NASTRAN - PATRAN**, care permite determinarea factorului de intensitate a tensiunii K în domeniul liniar-elastic dar și a integralei J în domeniul elasto-plastic. Modulul **PATRAN** permite estimarea duratei totale de viață prin calculul duratei pentru inițiere a fisurii, respectiv a duratei de propagare a fisurii până la rupere.

- **ABAQUS**, care poate fi utilizat atât în domeniul liniar-elastic cât și în domeniul elasto-plastic. Programul poate lua în considerare efectele neliniare și tranzitorii ce apar în timpul șocurilor termice, având și un modul pentru studiul transferului de căldură și a tensiunilor produse de variațiile de temperatură.

- **NISA**, care este un program ce conține un modul foarte performant pentru calculul parametrilor din Mecanicii ruperii liniar-elastice și elasto-plastice.

Dintre programele specializate de analiză a problemelor cu discontinuități geometrice de tipul fisurilor, se amintesc:

- programul **WARP3D**, elaborat de Computational Fracture Mechanics Group de la University of Illinois at Urbana-Champaign sub conducerea prof. R.H. Dodds, care este un program de analiză cu elemente finite specializat pentru calculul structurilor tridimensionale supuse solicitărilor statice sau dinamice; el permite calculul în domeniul liniar-elastic, în domeniul elasto-plastic (calculează integrala **J**), dar și studiul creșterii fisurii. Programul rulează în sistemul de operare UNIX implementat pe stații grafice de tipul CRAY, HP 9000, IBM RISC 6000, Silicon Graphics;

- programul **ZIP3D**, dezvoltat la University of Georgia, este un program avansat de analiză cu elemente finite a corpurilor tridimensionale fisurate; calculul fiind posibil în domeniul liniar elastic (factorul de intensitate a tensiunii **K** prin metoda extensiei virtuale a fisurii) sau elasto-plastic (integrala **J** și deplasarea de deschidere la vârful fisurii δ). Programul calculează parametrii de Mecanica ruperii în cazul modurilor mixte de rupere. Acest program rulează pe platforme CRAY.

- programul **FRANC3D**, dezvoltat de un grup de cercetători de la Cornell University, având autori principali pe A.R. Ingraffea și P. Wawrzynek, care este un program pentru calculul factorilor de intensitate a tensiunii la corpurile tridimensionale cu fisuri, în domeniul liniar-elastic. Programul are un modul care permite analiza cu elemente finite a propagării fisurilor. Programul **FRANC3D** are versiuni care rulează pe stații grafice Silicon Graphics, Dec Alpha, IBM RISC6000, HP, dar și în sistemul de operare Windows folosind un emulator de UNIX de genul EXCEED 3D sau CYGWIN.

- programele **FRANC2D** și **FRANC2DL**, sunt variante bidimensionale ale programului **FRANC3D**, dezvoltate la Cornell University, respectiv Kansas State University de prof. D. Swenson. Programul permite calculul: factorilor de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} , forței de extensie a fisurii G_I și G_{II} și integralelor de contur J_I și J_{II} la elemente de rezistență plane cu fisuri, solificate în domeniul liniar-elastic. O facilitate suplimentară a programului este că permite calculul structurilor plane multistrat cu fisuri. Programul **FRANC2DL** permite și estimarea direcției de propagare a unei fisuri și

trasează variația factorului de intensitate a tensiunii în funcție de lungimea fisurii, în cazul propagării acesteia prin oboseală.

Mai sunt menționate **programele pentru calculul parametrilor de Mecanica ruperii pe baza soluțiilor analitice:**

- programul **NASRAC** (realizat de NASA Marshall Space Flight Center) este unul dintre primele programe de calcul a parametrilor de Mecanica ruperii, Harris-Bianca (1987). El are posibilitatea calculului parametrilor caracteristici mediilor liniar-elastice cu fisuri (factorului de intensitate a tensiunii K), mediilor elasto-plastice cu fisuri (integrala J , deplasarea de deschidere la vârful fisurii δ), determinarea vitezei de propagare a fisurii da/dN sub acțiunea ciclurilor de oboseală. Programul conține peste 30 de geometrii pentru care se pot calcula parametrii de mecanica ruperii, pentru creșterea fisurii dispune de 7 modele, are posibilitatea de a lua în considerare fenomenul de întârziere la creșterea fisurii și poate fi utilizat la studiul acumulării defectelor.

- programul **NASGRO**, dezvoltat la NASA Johnson Space Center, se bazează pe principiile Mecanicii ruperii și conține trei module: NASFLA care permite calculul factorilor de intensitate a tensiunii pentru o serie de geometrii și încărcări de corpuri fisurate din biblioteca programului, NASBEM un modul 2D de calcul a factorilor de intensitate a tensiunii bazat pe metoda elementelor de frontieră și NASMAT o bază de date cu peste 9000 de date cu proprietăți de material.

- programul **CRACK2000** se bazează pe principiile Mecanicii ruperii în domeniul liniar - elastic pentru estimarea durabilității corpurilor fisurate. Programul are implementate 51 de soluții pentru factorii de intensitatea ai tensiunii, care sunt folosite pentru propagarea fisurilor.

- programul **VATTPACK**, care determină parametrii de rupere K și J pentru plăci, învelișuri subțiri, tuburi, recipiente care conțin defecte de suprafață sau interioare și sunt supuse unor șocuri termice. Programul a fost elaborat de specialiștii de la ABB Impell, din care a făcut parte și prof. dr. ing. M. Rațiu, (1985).

- programul **ENDURE**, elaborat de Engineering Mechanics Research Center, este un program care permite analiza parametrilor de rupere și a duratei de viață a structurilor. Programul conține mai multe modele pentru a stabili inițierea fisurii, precum și pentru estimarea propagării fisurii. Permite calculul factorului de intensitate a tensiunii K , a forței de extensie a fisurii G , a integralei J sau deplasării de deschidere la vârful fisurii δ , pentru o serie de modele de geometrii cu fisuri care pot fi supuse la diferite tipuri de încărcări, dintre care trebuie menționate încărcări dinamice și aleatorii. Acest program rulează sub sistem Unix pe stații grafice.

- programul **AFGROW** pentru studiul propagării fisurilor sub acțiunea solicitărilor variabile cu amplitudine constantă sau variabilă, dezvoltat la Air Force Research Laboratory din SUA. Acest program conține o bibliotecă cu soluții de corpuri cu fisuri și o foarte importantă bază de date cu proprietăți de mecanica ruperii pentru un număr foarte mare de aliaje din oțel, aluminiu și titan folosite în industria aeronautică.

- programul **FASTRAN II**, elaborat la NASA Langley Research Center, pentru calculul propagării prin oboseală a fisurilor. Astfel, selectând una dintre cele 17 modele de geometrii fisurate și definind ciclul de solicitare care poate fi cu amplitudine constantă, cu amplitudine variabilă sau spectrul solicitării, programul calculează viteza de creștere a fisurii da/dN în funcție de variația factorului de intensitate a tensiunii ΔK_I , respectiv variația numărului de cicluri N_c în funcție de lungimea fisurii a . Programul ia în considerare efectele de plasticitate de la vârful fisurii, precum și fenomenele de retardare sau accelerare a propagării fisurii în cazul încărcărilor cu amplitudine variabilă.

- programul **NASA/FLAGRO**, realizat de specialiștii de la NASA Lockheed Engineering & Sciences Co., este un program pentru calculul duratei de viață a unei structuri și a dimensiunilor critice ale unei fisuri, dimensiuni la care se produce ruperea instabilă. Programul conține o bază de date cuprinzând soluții cu factorul de intensitate a tensiunii pentru diferite geometrii cu fisuri și o bază de date cuprinzând caracteristicile de material: limita de curgere σ_c , rezistența la rupere R_m și tenacitatea la rupere K_{IC} pentru cele mai utilizate materiale (oțeluri, aliaje de aluminiu, etc.).

- programul **COVASTOL**, program specializat în analiza probabilistică a creșterii fisurii, estimarea duratei de viață și evaluarea probabilității de rupere.

În cazul în care nu se dispune de un program care să permită calculul parametrilor de Mecanica ruperii, pentru determinarea acestora se poate utiliza un program general de analiză cu elemente finite (COSMOS/M, ANSYS, ALGOR, I-DEAS etc.), în care se modelează discontinuitatea geometrică, urmând ca evaluarea parametrilor de rupere să se facă pe baza datelor de ieșire obținute în urma rulării programului (tensiuni, deplasări, energie de deformație).

Trebuie subliniat faptul că toate aceste programe se află într-o continuă modernizare și diversificare.

Pentru a avea o imagine generală a utilizării programelor de calcul la diferite niveluri ale *evaluării siguranței în exploatare a elementelor de rezistență*, se va relua ordinograma prezentată în capitolul 1 într-o prezentare din punctul de vedere al programelor de calcul, figura 3.1.

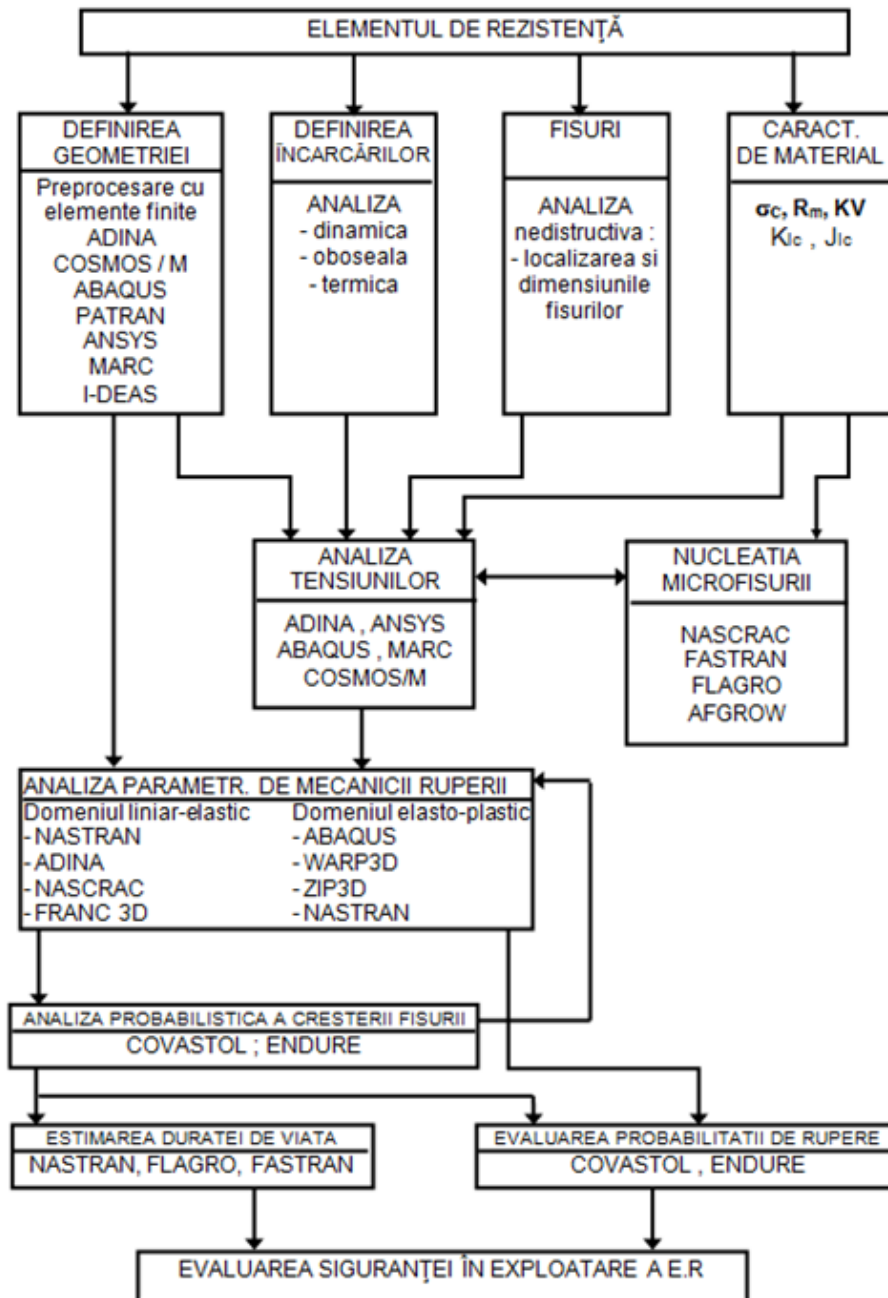


Figura 3.1. Programe utilizate în diverse etape pentru evaluarea siguranței în exploatare

În concluzie la ora actuală la îndemâna inginerilor există o mare diversitate de programe, bazate pe analiza numerică, pentru calculul parametrilor din Mecanica ruperii, rolul acestora fiind de a utiliza eficient aceste programe în vederea soluționării problemelor practice apărute în proiectare și în exploatare.

3.3. Utilizarea metodei elementului finite pentru calculul parametrilor din mecanica ruperii

Calculul numeric al parametrilor din Mecanica ruperii s-a impus în ultima vreme datorită complexității geometriei corpurilor cu fisuri. La ora actuală Metoda Elementelor Finite (MEF) este cea mai utilizată metodă de determinare numerică a factorului de intensitate a tensiunii. Aspectele particulare ale utilizării MEF pentru calculul factorului de intensitate a tensiunii se referă la:

- modelarea singularității vârfului fisurii;
- utilizarea calculului numeric pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii.

3.3.1 Modelarea singularității vârfului de tensiune

Studiile inițiale, de analiză cu elemente finite în probleme de Mecanica ruperii, folosesc elemente finite convenționale, Parsons și Hall (1989). Pentru obținerea unei precizii adecvate a câmpurilor singulare de tensiune și deformație de la vârful fisurii a fost necesară o discretizare extrem de fină în jurul vârfului fisurii. Dezvoltările ulterioare au impus utilizarea elementelor finite speciale prin care s-au obținut precizii superioare în condițiile unor discretizări mai grosiere, Heymann (1979).

Trebuie reținute două procedee distincte pentru modelarea singularității câmpului de tensiune și deformație de la vârful fisurii, și anume:

1. alegerea unor funcții de interpolare speciale pentru aproximarea deplasărilor;
2. schimbarea poziției unor noduri, astfel încât pentru unul din nodurile elementului să se obțină o singularitate a deformațiilor.

Primul procedeu se aplică în general elementelor finite triunghiulare cu 6 noduri, funcțiile de interpolare alegându-se astfel încât la unul din noduri deformațiile specifice să prezinte o singularitate de forma r^{-p} , Yu și Wilson (1978).

Studiile ulterioare au reliefat că pentru a găsi o soluție numerică eficientă, în cazul problemelor cu discontinuități geometrice de forma fisurilor, este avantajoasă utilizarea

unor elemente izoparametrice speciale la vârful fisurii, Furgieue și Luchi (1989). Acestea se obțin prin deplasarea nodurilor de la mijlocul laturilor (la elementele izoparametrice cu 8 noduri) la $1/4$ din latura elementului finit, spre nodul în care se dorește obținerea singularității. Aceste elemente modelează direct singularitatea câmpului elastic de deformație $1/\sqrt{r}$, în vecinătatea vârfului fisurii, prin intermediul matricei de transformare a coordonatelor.

În continuare, se prezintă modul de modelare a singularității la vârful fisurii pentru elementul izoparametric cu 8 noduri prin suprapunerea a 3 noduri și deplasarea nodurilor de la mijlocul laturilor adiacente vârfului fisurii spre nodul considerat vârful fisurii, figura 3.2.

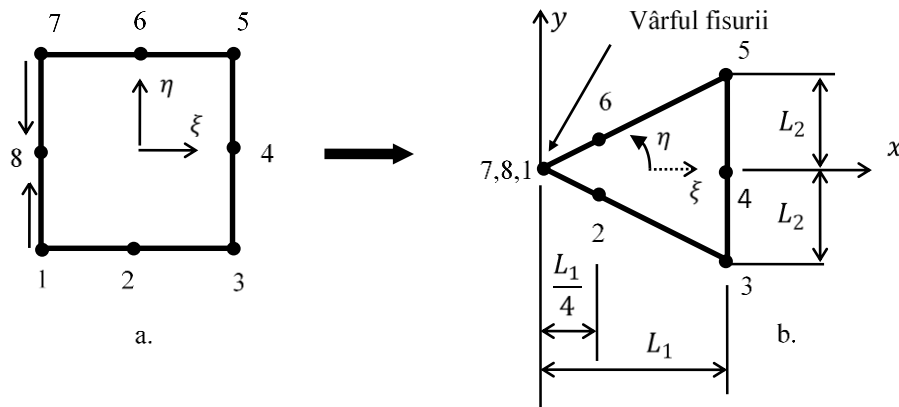


Figura 3.2. Obținerea elementului singular (b) pornind de la elementul izoparametric cu 8 noduri (a)

Pornind de la elementul izoparametric dreptunghiular cu 8 noduri (figura 3.2) pentru care funcțiile de interpolare, de-a lungul axei $\eta = 0$, au forma:

$$\begin{aligned}
 N_1 = N_3 = N_5 = N_7 &= -\frac{1}{4}(1 - \xi^2) \\
 N_2 = N_6 &= \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \\
 N_4 &= \frac{1}{2}(1 + \xi) \\
 N_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi)
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

pentru modelarea singularității vârfului fisurii nodurile 7 și 8 se suprapun peste nodul 1, iar nodurile 2 și 6 se deplasează la distanța $L_1/4$.

Considerând ca origine a sistemului nodul 1, din figura 3.2b se observă că:

$$\begin{aligned}
x_1 = x_7 = x_8 &= 0 \\
x_2 = x_6 &= \frac{L_1}{4} \\
x_3 = x_4 = x_5 &= L_1
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ținând cont de relațiile dintre coordonatele naturale (η, ξ) și coordonatele generale (x, y) :

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \tag{3.3}$$

și de relațiile (3.1) și (3.2) se obține:

$$x = \frac{L_1}{4}(1 + \xi)^2 \quad \text{sau} \quad \xi = -1 + 2\sqrt{\frac{x}{L_1}} \tag{3.4}$$

Variația deplasării u de-a lungul axei x se exprimă prin intermediul funcțiilor de interpolare și a deplasărilor nodale u_i sub forma:

$$u = \sum_{i=1}^8 N_i u_i \tag{3.5}$$

din care, ținând cont de expresiile funcțiilor de interpolare N_i (3.1), se obține:

$$u = -\frac{1}{4}(1 - \xi^2)(u_1 + u_3 + u_5 + u_7) + \frac{1}{2}(1 - \xi^2)(u_2 + u_6) + \frac{1}{2}(1 + \xi)u_4 + \frac{1}{2}(1 - \xi)u_8 \tag{3.6}$$

Deformația specifică se calculează conform definiției:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial \xi}$$

unde $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{L_1 x}}$, respectiv din relația (3.6):

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\xi(u_1 + u_3 + u_5 + u_7) + \frac{1}{2}(u_4 - u_8) \tag{3.7}$$

Astfel înlocuind în expresia deformației specifice derivatele parțiale de mai sus și ținând cont de relația dintre coordonatele ξ și x , respectiv că $u_1 = u_7 = u_8$, rezultă:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{L_1}(2u_1 + u_3 + u_5 - 2u_2 - 2u_6) - \frac{1}{2\sqrt{L_1 x}}(3u_1 + u_3 + u_5 - u_4 - 2u_2 - 2u_6) \tag{3.8}$$

Se observă că variația deformației specifice ε_x prezintă o singularitate în nodul 1 de ordinul $1/\sqrt{x}$ sau, dacă exprimarea se face în funcție de raza polară, aceasta este de ordinul $1/\sqrt{r}$. Aceeași variație a deformației specifice se obține și pentru componenta ε_y . Utilizând astfel de elemente se poate obține singularitatea câmpului de deformație, respectiv tensiune pentru toate direcțiile radiale ce pornesc din nodul 1.

3.3.2. Determinarea factorului de intensitate a tensiunii

În programele de analiză cu elemente finite utilizate în aplicațiile de Mecanica ruperii după determinarea deplasărilor, deformațiilor specifice și a tensiunilor se trece la calculul parametrilor specifici Mecanicii ruperii. La ora actuală factorul de intensitate a tensiunii este unanim acceptat ca parametru ce caracterizează câmpul de deformații și tensiuni din jurul fisurilor pentru materiale cu comportare liniar-elastică. Determinarea factorului de intensitate a tensiunii când se utilizează programele de analiză cu elemente finite are la bază diferite metode, Chen și Xie (1992), Robinson (1973). Cele mai utilizate vor fi tratate în cele ce urmează.

a). Metoda extrapolării deplasării

Pe baza deplasărilor obținute în urma rezolvării sistemului algebric de ecuații și a soluției lui Irwin (1957) de reprezentare a tensiunilor și deplasărilor în jurul fisurii se poate trece la determinarea factorului de intensitate a tensiunii.

Expresiile generale ale deplasărilor în vecinătatea unei fisuri în funcție de factorii de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} și coordonatele polare (r, θ) sunt:

$$\begin{aligned} u &= \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \right] - \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi + 3) \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ v &= \frac{K_I}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \right] + \frac{K_{II}}{4\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \left[(2\chi - 3) \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \quad (3.9)$$

unde K_I , K_{II} reprezintă factorii de intensitate ai tensiunii corespunzători modurilor I, respectiv II de solicitare; μ modulul de elasticitate transversal; $\chi = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ pentru starea plană de tensiune și $\chi = 3 - 4\nu$ pentru starea plană de deformație; ν coeficientul lui Poisson.

Pe baza relațiilor de mai sus se pot exprima factorii de intensitate ai tensiunii, după cum urmează:

$$\begin{aligned}
K_I \begin{cases} (2\chi - 1) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \\ (2\chi + 1) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \end{cases} &= 4\mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \\
K_{II} \begin{cases} -(2\chi + 3) \sin \frac{\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2} \\ -(2\chi - 3) \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{3\theta}{2} \end{cases} &= 4\mu \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

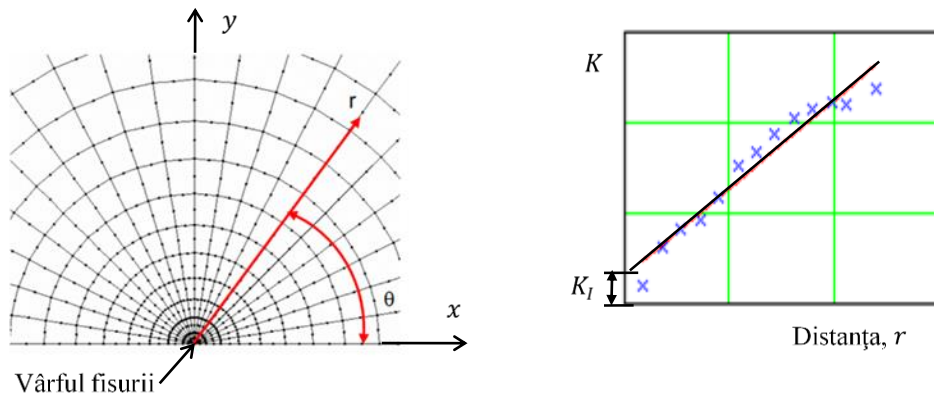


Figura 3.3. Aplicarea metodei extrapolării deplasărilor

Având cunoscute deplasările u, v din nodurile considerate de-a lungul unei direcții radiale ce pornește din vârful fisurii, care face unghiul θ cu direcția x , se poate trasa variația factorilor de intensitate ai tensiunii aparente K_I sau K_{II} în funcție de raza polară r , figura 3.3a. Variația factorului de intensitate a tensiunii în funcție de distanța r se poate asimila ca fiind liniară. Prin extrapolare la $r = 0$ se obține valoarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful fisurii, figura 3.3b.

Creager și Paris (1967) prezintă un studiu al preciziei estimării factorului de intensitate a tensiunii prin metoda extrapolării deplasării, studiu în care se prezintă limitele acestei metode precum și valorile unghiului θ pentru care se obține o bună precizie la determinarea factorului de intensitate a tensiunii.

Dintre avantajele acestei metode trebuie amintite: simplitatea și faptul că utilizează ca mărimi de calcul deplasările nodale care se obțin în urma analizei cu elemente finite; posibilitatea de a fi utilizată în cazul aplicațiilor în condițiile unor moduri mixte de deplasare a flancurilor fisurii. Dezavantajele metodei constau în faptul că pentru aplicarea ei este necesară cunoașterea soluției câmpului de deplasări din vecinătatea

vârfului fisurii (aceste soluții nefiind cunoscute în cazul anumitor materiale compozite, la interfața dintre materialele multistrat etc.), iar precizia estimării este influențată de finețea discretizării, de alegerea direcției după care se face extrapolarea, de numărul și poziția nodurilor considerate.

b). Metoda forței de extensie a fisurii

Forța de extensie a fisurii, G este un alt parametru al Mecanicii ruperii în domeniul liniar-elastic.

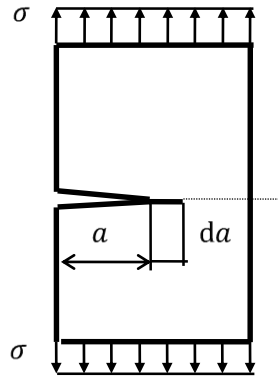


Figura 3.4. Corp cu fisură de lungime a și extensia acesteia da

Dacă se consideră că o fisură de lungime a avansează sub acțiunea încărcărilor exterioare cu o cantitate infinitesimală da , în același timp producându-se o eliberare a energiei elastice de deformație dU , forța de extensie a fisurii se definește:

$$G = \frac{dU}{da} \quad (3.11)$$

Această mărime se mai numește și rata de eliberare a energiei de deformație. Legătura dintre forța de extensie a fisurii G și factorul de intensitate a tensiunii K este dată în Mecanica ruperii liniar-elastice sub forma:

$$K_I = (E^* \cdot G_I)^{0,5}; \quad K_{II} = (E^* \cdot G_{II})^{0,5} \quad (3.12)$$

unde K_I, K_{II} sunt factorii de intensitate ai tensiunii corespunzători modurilor I respectiv II de deplasare a flancurilor fisurii; G_I, G_{II} sunt forțele de extensie a fisurii corespunzătoare modurilor I și II de deplasare a flancurilor fisurii; $E^* = E$ pentru starea plană de tensiune și $E^* = E/(1 - \nu^2)$ pentru starea plană de deformație.

Pentru evaluarea factorului de intensitate a tensiunii prin această metodă se rulează analiza cu elemente finite pentru două lungimi diferite ale fisurii: a și $a + da$, (figura 3.4). Se calculează energia specifică de deformație pentru ambele cazuri U_1, U_2 , respectiv variația energiei specifice de deformație:

$$dU = U_1 - U_2 \quad (3.13)$$

Energia specifică de deformație se calculează pe baza vectorului deplasărilor totale $\{f\}$ și a matricei de rigiditate a structurii $[K]$ după rezolvarea sistemului algebric de ecuații:

$$U = \{f\}^T [K] \{f\} \quad (3.14)$$

Apoi, cu relația (3.11) se calculează forța de extensie a fisurii G , iar corespunzător modului de deplasare a flancurilor fisurii, cu una din relațiile (3.12), se poate determina valoarea factorului de intensitate a tensiunii K .

Avantajul principal al acestei metode constă în obținerea unei precizii ridicate a estimării factorului de intensitate a tensiunii, precizie care nu este influențată de finețea discretizării. În plus această metodă dă rezultate satisfăcătoare chiar dacă nu se utilizează elemente finite singulare.

Trebuie subliniat că această metodă necesită rezolvarea numerică a problemei pentru două lungimi diferite ale fisurii a și $a + da$, ceea ce duce la dublarea volumului de calcul, fapt ce constituie un dezavantaj.

c). Metoda extensiei virtuale a fisurii

Metoda reprezintă o variantă a celei prezentate anterior. Extinderea fisurii are loc prin deplasarea nodurilor rețelei de discretizare, din zona vârfului acesteia, cu o distanță infimezimală da pe direcția fisurii.

Metoda pornește de la integralele lui Irwin pentru evaluarea forțelor de extensie a fisurii, considerând o extensie virtuală ΔL , Ingrassia și Wawrzynek (2003), figura 3.5:

$$G_I = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{\Delta L} \sigma_{yy}(r = x, \theta = 0) v(r = \Delta L - x, \theta = \pi) dr$$

$$G_{II} = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta L} \int_0^{\Delta L} \tau_{xy}(r = x, \theta = 0) v(r = \Delta L - x, \theta = \pi) dr \quad (3.15)$$

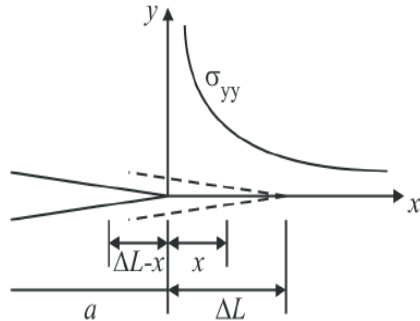
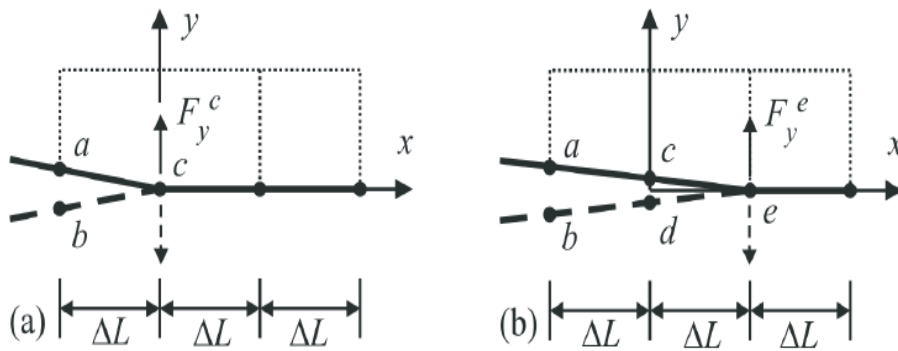


Figura 3.5. Extensia virtuală a fisurii

Rybicki și Kanninen (1977) implementează algoritmul de calcul în analiza liniară cu elemente finite nesingulare folosind o discretizare fină la vârful fisurii cu mărimea elementului egală cu extensia ΔL , figura 3.6.



a). Prima analiză

b). Analiza 2a după extensia fisurii

Figura 3.6. Discretizarea locală în vecinătatea fisurii

Integralele din relația (3.15) pot fi exprimate pe baza forțelor nodale F_x, F_y și deplasărilor nodale u, v :

$$\begin{aligned}
 G_I &= \frac{1}{2\Delta L} F_y^c (v^c - v^d) \\
 G_{II} &= \frac{1}{2\Delta L} F_x^c (u^c - u^d)
 \end{aligned}
 \tag{3.16}$$

unde c, d reprezintă nodurile corespunzătoare poziției fisurii inițiale în analiza a doua după extensia fisurii. Dacă ΔL este suficient de mic $v^c \cong v^a$, respectiv $u^c \cong u^a$, rezultă că:

$$\begin{aligned}
G_I &= \frac{1}{2\Delta L} F_y^c (v^a - v^b) \\
G_{II} &= \frac{1}{2\Delta L} F_x^c (u^a - u^b)
\end{aligned}
\tag{3.17}$$

În consecință, valorile forțelor de extensie a fisurii pot fi determinate printr-o singură analiza cu elemente finite având o discretizare suficient de fină la vârful fisurii, pe baza forțelor și deplasărilor nodale din nodurile a, b aflate pe flancurile fisurii, adiacente vârfului fisurii.

Această metodologie a fost aplicată elementelor singulare prezentate figura 3.7, Ramamurthy ș.a. (1996), sub forma:

$$\begin{aligned}
G_I &= \frac{1}{\Delta a} (C_{11}F_y^A + C_{12}F_y^F + C_{13}F_y^G)(u_y^B - u_y^E) + (C_{21}F_y^A + C_{22}F_y^F + C_{23}F_y^G)(u_y^C - u_y^D) \\
G_{II} &= \frac{1}{\Delta a} (C_{11}F_x^A + C_{12}F_x^F + C_{13}F_x^G)(u_x^B - u_x^E) + (C_{21}F_x^A + C_{22}F_x^F + C_{23}F_x^G)(u_x^C - u_x^D)
\end{aligned}
\tag{3.18}$$

unde coeficienții $C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{22}, C_{23}$ au valorile:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= \frac{33\pi}{2} - 52; & C_{12} &= 17 - \frac{21\pi}{4}; & C_{13} &= \frac{21\pi}{2} - 32; \\
C_{21} &= 14 - \frac{33\pi}{8}; & C_{22} &= \frac{7\pi}{2} - \frac{7}{2}; & C_{23} &= 8 - \frac{21\pi}{8}
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

iar A, B, C, D, E, F, G reprezintă nodurile elementelor adiacente vârfului fisurii.

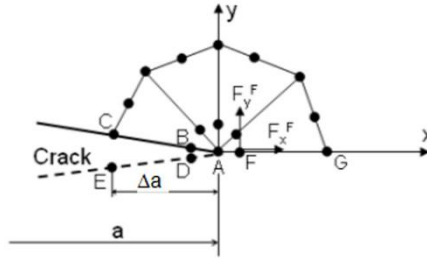


Figura 3.7. Aplicarea metodei extensiei virtuale a fisurii la elemente singulare

Această metodă asociată elementelor singulare este implementată în programele FRANC2D pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii.

Prin luarea în considerare, la calculul factorului de intensitate a tensiunii, doar a elementelor adiacente vârfului fisurii, scade semnificativ volumul de calcule ceea ce reprezintă principalul avantaj al metodei. De asemenea precizia estimării este ridicată și nu este influențată de finețea discretizării. Metoda permite calculul forțelor de extensie a fisurii și a factorilor de intensitate a tensiunii și pentru modurile mixte I și II .

Bibliografie

- Argyris J. H. (1960) *Energy theorems and structural analysis*, Butterworth.
- Chien W.Z., Xie Z.C. (1982) The superposition of the finite element method on the singularity terms in determining the stress intensity factor, *Engineering Fracture Mechanics* 16, 95-103.
- Creager M., Paris P.C. (1967) Elastic Field Equations for blunt cracks, *International Journal of Fracture Mechanics* 13, 247-252.
- Furguele F.M., Luchi M.L. (1989) A note on some crack tip elements employed in two-dimensional elasto-plastic fracture mechanics, *Engineering Fracture Mechanics*, 33, 831-837.
- Harris D.O., Bianca C.J. (1987) NASCRAC - A computer code for fracture mechanics analysis of crack growth, *AIAA 28th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Monterey, California*, 662-667.
- Heymann F.J. (1979) A review of the use of isoparametric finite elements for fracture mechanics, *Engineering Applications of Fracture Analysis, Proceedings of the First National Conference on Fracture, Johannesburg*, 371-385.
- Ingraffea A.R., Wawrzynek P.A. (2003) Finite element methods for linear elastic fracture mechanics, in *Comprehensive Structural Integrity*, I. Milne, R. O. Ritchie, B. Karihaloo (Editors), Elsevier, 1-88.
- Irwin G.R. (1957) Analysis of stress and strain near the end of a crack traversing a plate, *ASME Journal of Applied Mechanics* 24, 361-364.
- Marsavina L. (1998) *Metode numerice în mecanica ruperii*, Editura Mirton, Timișoara.
- Parsons I.D., Hall J.F. (1989) A finite element investigation of the elastostatic state near a three dimensional edge crack, *Engineering Fracture Mechanics* 33, 45-63.
- Ramamurthy T.S., Krishnamurthy T., Badari Narayana K., Vijayakumar K., Dattaguru B. (1986) Modified crack closure integral method with quarter point elements, *Mechanical Research Communication* 13, 179-186.
- Rațiu M. (1985) IMPELL VATTPACK computer code for fracture mechanics analysis of piping and vessels, ABB, San Ramon, USA.
- Robinson J. (1973) *Integrated theory of finite element methods*, John Wiley & Sons, London, 1973.

Rybicki E.R., Kanninen M. (1977) A finite element calculation of stress intensity factors by a modified crack closure integral, *Engineering Fracture Mechanics* 9, 931-938.

Yu I.W., Wilson W.K. (1978) Generation of singular elements for the analysis of cracked bodies, 78-1E7-NESPD-P1, Westinghouse R&D Center, Pittsburg.

4. Determinarea experimentală a parametrilor din mecanica ruperii

4.1. Introducere

Pe lângă metodele analitice și numerice, pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii și a câmpurilor de tensiune și deformație din vecinătatea fisurilor se utilizează și metode experimentale.

Adaptarea metodelor de analiză experimentală a tensiunilor pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii a preocupat în ultimii 30 de ani foarte mulți cercetători.

Dintre metodele experimentale utilizate la calculul parametrilor de mecanica ruperii trebuie amintite:

- metoda fotoelasticimetricii,
- metoda causticelor,
- metoda tensometriei electrice rezistive,
- metoda termoelasticimetricii,
- metode interferometrice și holografice,
- metoda corelării digitale a imaginilor,
- metoda lacurilor casante,
- metode combinate.

Metoda fotoelasticimetricii este cea mai utilizată, preocuparea în acest sens fiind de a găsi algoritmi de interpretare a datelor fotoelastice în parametri de Mecanica ruperii, Bradley și Kobayashi (1970), Chen (1995), Chen și Wang (1994), Etheridge și Dally (1977), Ghita și Marșavina (2002), Gdoutos și Papakaliatakis (1982), Hyde și Warrior (1990), Iliescu ș. a. (1994), Nurse și Patterson (1990), Smith și Smith (1970).

Metoda causticelor dezvoltată de P.S. Teocharis (1972, 1975) propune determinarea parametrilor de Mecanica ruperii: factorul de intensitate a tensiunii, raza zonei plastice, ordinul singularității câmpului de tensiune din vecinătatea unei fisuri pe baza analizei curbei caustice. Ulterior metoda causticelor a fost utilizată și pentru determinarea experimentală a valorii integralei J la materiale cu comportare elasto-plastică, Lee și Hong (1993). Exemple ale utilizării metodei causticelor pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii sunt prezentate de Freund ș.a. (1982), Gdoutos (1986), Theocaris și Petrou (1986), Theocaris și Philippidis (1987, 1989).

Tensometria electrică rezistivă fiind o metodă experimentală foarte precisă, având o mare sensibilitate, măsurătorile efectuându-se în condiții reale de funcționare, direct pe

structura reală este o altă metodă utilizată la determinarea parametrilor de mecanica ruperii. Ca și în cazul fotoelasticității, s-au dezvoltat diferite procedee de estimare a parametrilor de rupere pe baza măsurătorilor tensometrice. Berger (1986, 1988), Dally și Sanford (1985) și Sanford (1979) au dezvoltat diferite metode de determinare a factorului de intensitate a tensiunii folosind traductoare electrice rezistive. De asemenea Itoh ș.a. (1988) propun determinarea factorului de intensitate a tensiunii prin metoda extrapolării deformațiilor, măsurătorile realizându-se cu ajutorul unei rozete speciale.

Metoda termoelasticității se bazează pe măsurarea variațiilor de temperatură, produse de solicitările variabile, care sunt proporționale cu suma tensiunilor principale. Dezvoltarea sistemelor termoelastice după anii '90 a condus la adaptarea acestora pentru investigarea corpurilor fisurate și la implementarea unor algoritmi de extragere a parametrilor de Mecanica ruperii din datele termoelastice Stanley ș.a. (1986, 1993, 1996), Tomlinson ș.a (1997), Dulieu-Barton ș.a (2000), Tomlinson și Marșavina (2004).

Bazele utilizării interferometriei și holografiei pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii au fost puse de Post (1985), respectiv Dudderar ș.a. (1985). Totuși, aceste metode nu s-au impus deoarece densitatea mare a franjelor la vârful fisurilor, datorită concentrării puternice a tensiunilor face imposibilă numărarea acestor franje, deci evaluarea parametrilor de rupere se face cu erori mari. Totuși Tippur-Rosakis (1991) prezintă aplicații ale interferometriei pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii.

Metoda lacurilor casante este o metodă calitativă care permite localizarea zonelor cu puternice concentrații ale tensiunilor, la sarcini mult sub încărcarea reală a structurii. Ea este utilizată ca metodă nedistructivă pentru localizarea apariției fisurilor. Prin această metodă este dificilă determinarea cantitativă a stării de tensiune, respectiv a parametrilor de Mecanica ruperii.

S-a încercat combinarea metodelor experimentale pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii, ca de exemplu fotoelasticitate cu tensometrie electrică rezistivă Iliescu ș.a. (1994), fotoelasticitate cu interferometrie Smith (1987, 1991), Smith ș.a. (1989), respectiv fotoelasticitate cu termoelasticitate, Marșavina ș.a. (2008), astfel încât estimarea parametrilor de Mecanica ruperii să se facă cu o precizie cât mai ridicată.

4.2. Metoda fotoelasticimetriei. Interpretarea datelor fotoelastice

Fotoelasticimetria a fost una din primele metode experimentale cu care s-a încercat determinarea stării de tensiune și deformație din vecinătatea fisurilor. Primele încercări aparțin lui Irwin, prelucrarea datelor fotoelastice bazându-se pe soluția aproximativă a lui Irwin.

Dacă metoda fotoelasticimetriei este deja o metodă experimentală clasică, aplicarea ei la studiul stării de tensiune din jurul fisurilor și la estimarea parametrilor de mecanica ruperii este de strictă actualitate. Etheridge și Dally (1977), Aradya și Srianth (1986), Berkovits ș.a. (1974), Bradley și Kobayashi (1970), Marloff și Leven (1971), Smith și Smith (1970), Smith și Epstein (1982), Rao și Narayanan (1989), Theotokoglu ș.a. (1989), prezintă aplicații ale metodei fotoelasticimetriei pentru determinarea parametrilor de Mecanica ruperii.

Fotoelasticimetria este o metodă optică de analiză experimentală a stării de tensiune, care se bazează pe proprietatea de birefrință accidentală a unor materiale transparente, omogene și izotrope din punct de vedere optic în stare nesolicitată, dar care solicitate devin optic active. Practic birefrința accidentală constă în descompunerea unui fascicol de lumină polarizată (liniar sau circular), la trecerea printr-o placă birefringentă, în două fascicule polarizate, paralele cu direcțiile tensiunilor principale.

Irwin a arătat că factorul de intensitate a tensiunii, corespunzător modului I de deplasare a flancurilor fisurii, K_I poate fi determinat dintr-o singură izocromată ce apare pe modelul fotoelastic cu fisură. Figura 4.1 prezintă două imagini fotoelastice obținute pentru o platbandă solicitată la tracțiune monoaxială având fisură de margine normală pe direcția de solicitare (a.) - solicitată în modul I, respectiv înclinată față de direcția de solicitare (b.) - solicitată în modul mixt I + II. Imaginile s-au obținut într-un polariscop circular iluminat cu o sursă de lumină monocromată

De-a lungul anilor mulți cercetători au încercat să dea metode proprii de transformare a datelor fotoelastice în parametri de Mecanicii ruperii. În continuare se vor prezenta câteva dintre cele mai folosite astfel de metode.

a. Metoda Irwin

Pentru a lua în considerare tensiunile nesingulare ce apar datorită condițiilor de încărcare și rezemare, Irwin introduce pe lângă factorul de intensitate a tensiunii K_I , o tensiune nesingulară orientată de-a lungul direcției Ox , paralelă cu direcția tensiunii σ_{Ox} .

Introducând tensiunea nesingulară σ_{Ox} în soluția Irwin dată de ecuațiile (1.16), aceasta se poate rescrie, pentru modul I de deplasare a flancurilor fisurii, având o placă semi-infinită fisurată supusă unei încărcări monoaxiale, sub forma:

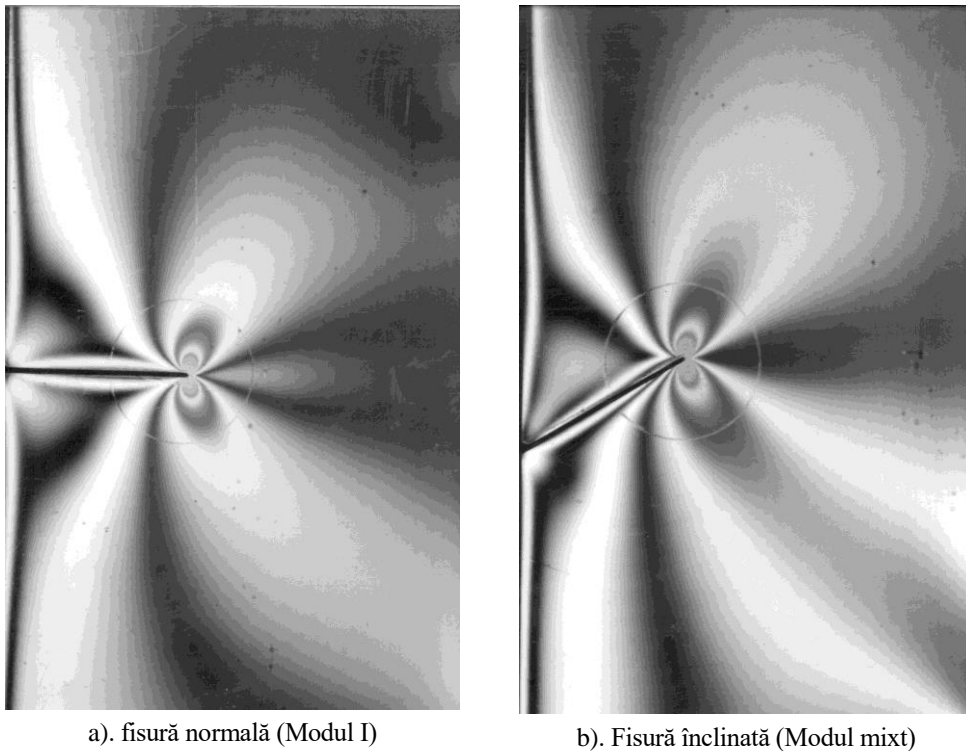


Figura 4.1. Imagini fotoelastice pentru o platbandă sollicitată monoaxial și având fisură laterală

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) - \sigma_{Ox} \\
 \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\
 \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Tensiunea tangențială maximă τ_m exprimată cu ajutorul tensiunilor σ_{xx} , σ_{yy} și τ_{xy} este:

$$(2\tau_m)^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (2\tau_{xy})^2 \quad (4.2)$$

Înlocuind în relația (4.2) tensiunile cu expresiile (4.1) se obține:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin^2 \theta + \frac{2\sigma_{0x} K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} + \sigma_{0x}^2 \quad (4.3)$$

Apoi Irwin, studiind geometria franjei izocromatei obținute în vecinătatea fisurii, figura 4.2 a observat că punctul m corespunde poziției extreme a franjei izocromate, adică pentru $r = r_m$, $\theta = \theta_m$:

$$\frac{\partial \tau_m}{\partial \theta} = 0 \quad (4.4)$$

Astfel, derivând expresia tensiunii tangențiale maxime τ_m în raport cu unghiul θ și înlocuind $\theta = \theta_m$ și $r = r_m$, se obține:

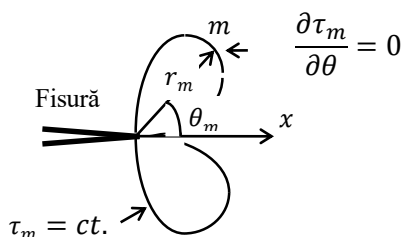


Figura 4.2. Reprezentarea mijlocului franjei izocromate

$$\sigma_{0x} = -\frac{K_I}{\sqrt{2\pi r_m}} \frac{\sin \theta_m \cos \theta_m}{\cos \theta_m \sin \frac{3\theta_m}{2} + \frac{3}{2} \sin \theta_m \cos \frac{3\theta_m}{2}} \quad (4.5)$$

Cei doi parametri necunoscuți K_I și σ_{0x} se determină rezolvând sistemul format din ecuațiile (4.3) și (4.4), în funcție de tensiunea tangențială maximă τ_m , obținând:

$$\sigma_{0x} = \frac{-2\tau_m \cos \theta_m}{\cos \frac{3\theta_m}{2} \left(\cos^2 \theta_m + \frac{9}{4} \sin^2 \theta_m \right)^{1/2}} \quad (4.6)$$

$$K_I = \frac{2\tau_m \sqrt{2\pi r_m}}{\sin \theta_m} \left[1 + \left(\frac{2}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{3\theta_m}{2}}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right)$$

Practic, dacă în urma încărcării unui model fotoelastic, pe imaginea din analizor se obține o izocromată, pe care se poate măsura raza maximă r_m , respectiv unghiul θ_m și ținând cont de legea cantitativă a fotoelasticității:

$$\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{k_\sigma f_\sigma}{2} \quad (4.7)$$

unde k_σ este ordinul franjei izocromate iar f_σ constanta fotoelastică a materialului, se poate determina tensiunea tangențială maximă τ_m . Apoi cu relațiile (4.5) și (4.6) se pot calcula factorul de intensitate a tensiunii K_I și tensiunea nesingulară σ_{Ox} pe baza datelor fotoelastice.

Studiind variația parametrilor K_I și σ_{Ox} în funcție de unghiul maxim al izocromatei θ_m dintr-un model fotoelastic cu fisură se desprind următoarele concluzii:

- reprezentând raportul $\sigma_{Ox}/(2\tau_m)$ - figura 4.3, respectiv $K_I/(2\tau_m\sqrt{2\pi r_m})$ - figura 4.4, în funcție de unghiul de înclinare al izocromatei θ_m se observă că din punct de vedere fizic metoda Irwin este aplicabilă pentru valori ale unghiului θ_m cuprinse între $(69,4^\circ - 148,8^\circ)$

- mai mult, pentru valori ale unghiului θ_m cuprinse între $(73,5^\circ - 134^\circ)$, abaterea în estimarea valorii K_I este de $\pm 2\%$.

- precizia măsurării unghiului θ_m , respectiv a razei r_m influențează semnificativ precizia determinării parametrilor K_I și σ_{Ox} .

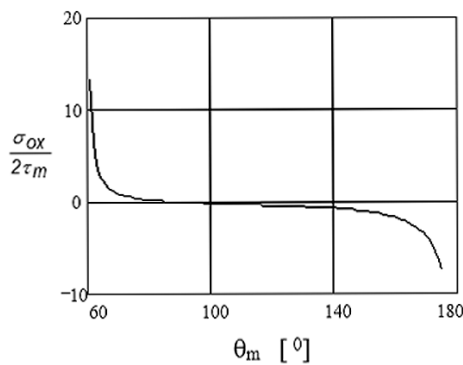


Figura 4.3. Variația raportului $\sigma_{Ox}/(2\tau_m)$

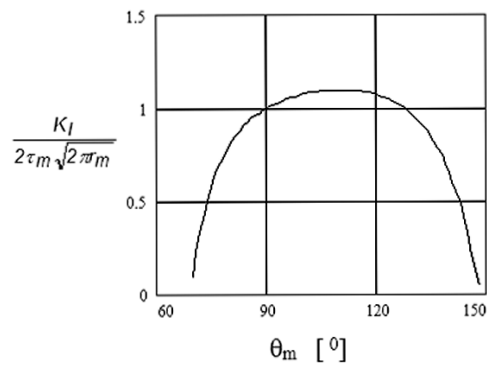


Figura 4.4. Variația raportului $K_I/(2\tau_m\sqrt{2\pi r_m})$

b. Metoda Bradley - Kobayashi

Ulterior Bradley și Kobayashi (1970), Kobayashi ș.a. (1972, 1976) studiind starea de tensiune într-un model fotoelastic, în timpul încărcării dinamice prin intermediul unei pene figura 4.5.a, pentru a reduce influența unghiului θ_m asupra preciziei de determinare a factorului de intensitate a tensiunii, consideră componenta nesingulară a tensiunii de forma:

$$\sigma_{ox} = \alpha\sigma = \alpha \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \quad (4.8)$$

unde σ este tensiunea aplicată asupra modelului perpendicular pe direcția fisurii, α este un coeficient (în cazul particular $\alpha = 1 \Rightarrow \sigma_{ox} = \sigma$), a reprezintă lungimea fisurii și K_I factorul de intensitate a tensiunii.

Folosind această substituție în expresia tensiunii tangențiale maxime (4.3) se obține:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{K_I^2}{2\pi r} \left(\sin^2 \theta + 2\alpha \sqrt{\frac{2r}{a}} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} + \frac{2r\alpha^2}{a} \right) \quad (4.9)$$

Dacă se derivează această ecuație în raport cu unghiul θ și se anulează derivata pentru $r = r_m$ și $\theta = \theta_m$, condiția (4.4), se obține:

$$\alpha \sqrt{\frac{2r_m}{a}} = \frac{-\sin \theta_m \cos \theta_m}{\cos \theta_m \sin \frac{3\theta_m}{2} + \frac{3}{2} \sin \theta_m \cos \frac{3\theta_m}{2}} \quad (4.10)$$

Din relația (4.9) factorul de intensitate a tensiunii se poate exprima sub forma:

$$K_I = \frac{2\tau_m \sqrt{2\pi r_m}}{\left(\sin^2 \theta_m + 2\alpha \sqrt{\frac{2r_m}{a}} \sin \theta_m \sin \frac{3\theta_m}{2} + \frac{2r_m \alpha^2}{a} \right)^{1/2}} \quad (4.11)$$

Înlocuind în această expresie relația (4.10), în urma efectuării calculelor se obține expresia factorului de intensitate a tensiunii sub forma:

$$K_I = \frac{\pm 2\tau_m \sqrt{2\pi r_m}}{\sin \theta_m} \left(1 + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{3\theta_m}{2}}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right) \left[1 + \left(\frac{2}{3 \operatorname{tg} \theta_m} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

unde valoarea pozitivă corespunde domeniului $69,4^\circ < \theta_m < 148,8^\circ$.

Comparând expresiile factorului de intensitate a tensiunii date de metoda Irwin, relația (4.6) și de metoda Bradley-Kobayashi, relația (4.12), se observă că ele sunt identice.

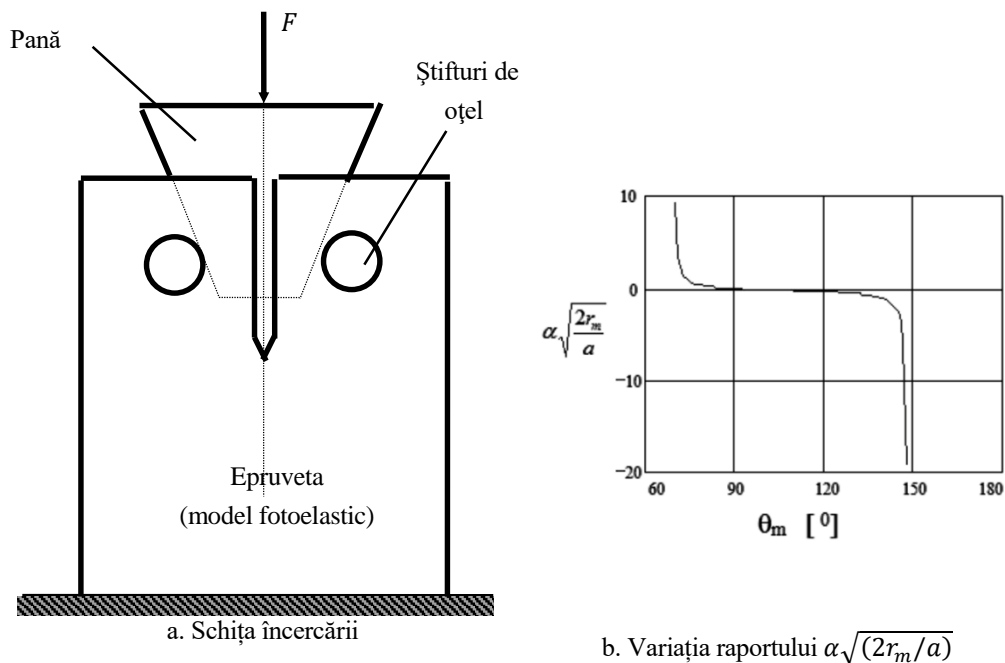


Figura 4.5. Metoda Bradley - Kobayashi

Ca și la metoda precedentă înlocuind $2\tau_m = k_\sigma f_\sigma$ conform legii cantitative a fotoelasticității, se poate determina cu relația (4.12) valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I .

Bradley și Kobayashi au studiat erorile produse în determinarea factorului de intensitate a tensiunii K_I când unghiul θ_m se apropie de valorile $69,4^\circ$, respectiv $148,8^\circ$. În aceste zone mici erori în măsurarea unghiului θ_m , produc mari erori în evaluarea factorului de intensitate a tensiunii K_I . Pentru a minimaliza aceste erori cei doi autori propun folosirea a două franje izocromate. În acest caz, se încarcă modelul până la nivelul la care în imaginea din analizor se obțin două franje izocromate.

Scriind ecuația (4.12) pentru cele două franje și efectuând diferența dintre acestea se obține:

$$K_I = \frac{2\sqrt{2\pi}(\tau_{m1} - \tau_{m2})\sqrt{r_1 r_2}}{f_{\sigma 2}\sqrt{r_1} - f_{\sigma 1}\sqrt{r_2}} \quad (4.13)$$

unde: r_1, r_2 sunt razele celor două izocromate; τ_{m1}, τ_{m2} sunt tensiunile tangențiale maxime corespunzătoare celor două izocromate; $k_{\sigma 1}, k_{\sigma 2}$ ordinul izocromatei; f_σ valoarea benzii.

Astfel, factorul de intensitate a tensiunii K_I se determină utilizând izocromatele având ordinele de bandă $k_{\sigma 1}, k_{\sigma 2}$, respectiv cu tensiunile tangențiale $\tau_{m1} = k_{\sigma 1} f_{\sigma} / 2$ și $\tau_{m2} = k_{\sigma 2} f_{\sigma} / 2$.

Studiind variația parametrului $\alpha \sqrt{(2r_m/a)}$ în funcție de unghiul de înclinare al izocromatei θ_m , figura 4.5.b, Bradley și Kobayashi au arătat că pentru $82^\circ < \theta_m < 113^\circ$, acest parametru are o valoare mică (mai mică de 0,2), ceea ce reflectă că variația acestui parametru în domeniul menționat, este aproape insensibilă la variația unghiului θ_m . Deci, dacă se fac erori la măsurarea unghiului θ_m în domeniul amintit, aceste erori nu vor influența esențial valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I , ceea ce prezintă un mare avantaj în comparație cu metoda Irwin.

c. Metoda Schroedel - Smith

Schroedel și Smith (1974), propun, pentru interpretarea datelor fotoelastice, utilizarea ordinului benzii franjelor izocromate pe o dreaptă perpendiculară pe direcția fisurii, adică $\theta = 90^\circ$. Introducând această valoare a unghiului θ în relația (4.3) se obține:

$$(2\tau_m)^2 = \frac{K_I^2}{2\pi r} + \frac{K_I \sigma_{Ox}}{\sqrt{\pi r}} + \sigma_{Ox}^2 \quad (4.14)$$

Ecuția (4.14) poate fi asimilată unei ecuații de gradul doi în K_I , sub forma:

$$\frac{K_I^2}{2\pi r} + \frac{K_I \sigma_{Ox}}{\sqrt{\pi r}} + \sigma_{Ox}^2 - 4\tau_m^2 = 0$$

care are rădăcina pozitivă:

$$K_I = \sqrt{\pi r} [(8\tau_m^2 - \sigma_{Ox}^2)^{1/2} - \sigma_{Ox}] \quad (4.15)$$

Smith simplifică relația (4.15) neglijând termenul σ_{Ox}^2 în comparație cu $8\tau_m^2$, obținând în final:

$$K_I = \sqrt{\pi r} (2\sqrt{2}\tau_m - \sigma_{Ox}) \quad (4.16)$$

Separarea parametrilor K_I și σ_{Ox} se face adoptând tehnica diferenței a lui Bradley-Kobayashi, adică considerând două franje izocromate i și j , figura 4.6, la care se măsoară distanțele r_i respectiv r_j , perpendicular pe direcția fisurii ($\theta = 90^\circ$) și se calculează tensiunile tangențiale maxime corespunzătoare: $2\tau_{mi} = k_{\sigma i} f_{\sigma}$, respectiv $2\tau_{mj} = k_{\sigma j} f_{\sigma}$.

Dacă se scrie ecuația (4.16) pentru cele două franje i și j și se elimină tensiunea nesingulară σ_{Ox} , se obține expresia factorului de intensitate a tensiunii sub forma:

$$K_I = \sqrt{2\pi r} \frac{2\tau_{mi} - 2\tau_{mj}}{1 - \sqrt{\frac{r_i}{r_j}}} \quad (4.17)$$

Determinând valorile factorului de intensitate a tensiunii K_I cu relația (4.17) pentru toate combinațiile posibile ale perechilor de franje izocromate (i, j) , care apar pe model în urma încărcării, se obține un set de valori K_{Ii} , care este supus apoi analizei statistice. Aceasta constă în determinarea:

- mediei aritmetice

$$\bar{K}_I = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{Ii} \quad (4.18)$$

- abaterii medii pătratice

$$s_{K_I} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n n_i (K_{Ii} - \bar{K}_I)^2} \quad (4.19)$$

unde n este numărul de perechi pentru care se determină factorul de intensitate a tensiunii K_{Ii} .

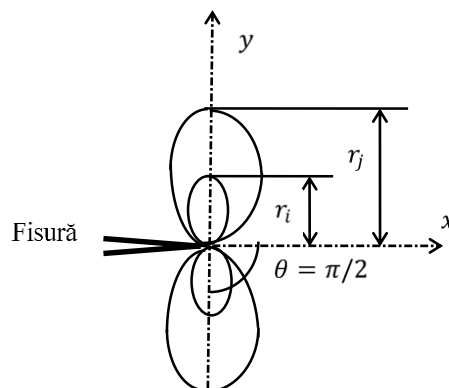


Figura 4.6. Două franje izocromate i, j

Pentru creșterea preciziei determinării se elimină apoi din setul de date K_{Ii} , cu $i \in [1, n]$, cele m valori care depășesc intervalul $K_I \pm s_{K_I}$, iar cu valorile rămase se recalculează valoarea medie:

$$\bar{K}_{Imed} = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^{n-m} K_{Ii} \quad (4.20)$$

Utilizând această prelucrare statistică erorile în estimarea factorului de intensitate a tensiunii nu depășesc $\pm 5\%$, dacă razele r_i și r_j se măsoară fără erori și ordinele de bandă $k_{\sigma i}, k_{\sigma j}$ se determină cât mai precis, utilizând procedeele de compensare Tardy sau de multiplicare a ordinului de bandă Post.

d. Metoda Smith

C.W. Smith (1986, 1987, 1991) propune utilizarea unui alt algoritm pentru determinarea factorului de intensitate a tensiunii în vecinătatea unei fisuri, pe baza datelor obținute în urma analizei fotoelastice.

Smith exprimă tensiunea tangențială maximă, dată de relația (4.14) și scrisă pentru $\theta = 90^\circ$, sub forma:

$$\tau_{med} = \frac{K}{\sqrt{8\pi r}} + \frac{\sigma_0}{\sqrt{8}} \quad (4.21)$$

unde $\sigma_0/\sqrt{8}$ reprezintă influența tensiunii nesingulare asupra tensiunii tangențiale maxime.

Apoi definește factorul de intensitate a tensiunii aparent:

$$K_{AP} = \tau_m \sqrt{8\pi r} \quad (4.22)$$

și împarte ecuația (4.21) cu $\sigma\sqrt{\pi a}$, unde σ reprezintă tensiunea cu care se realizează încărcarea, a este lungimea fisurii pentru fisuri marginale sau semilungimea fisurii pentru fisuri înglobate în corp. Se obține:

$$\frac{K_{AP}}{\sigma\sqrt{\pi a}} = \frac{K}{\sigma\sqrt{\pi a}} + \frac{\sigma_0}{\sigma} \left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} \quad (4.23)$$

Reprezentând ecuația (4.23), adică $K_{AP}/\sigma\sqrt{\pi a}$ în funcție de $(r/a)^{1/2}$, figura 4.7, se obține o dreaptă ce are panta σ_0/σ . Prin extrapolare pentru $(r/a)^{1/2} = 0$ se obține valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I , pentru modul I de deplasare a flancurilor fisurii, corespunzător singularității câmpului de tensiune, creată la vârful fisurii.

Experiența a arătat că precizia maximă în evaluarea factorului de intensitate a tensiunii K_I prin această metodă, se obține dacă se iau în considerare doar punctele cuprinse în intervalul $(r/a)^{1/2} \in [0,2 \dots 0,4]$. Explicația acestui fenomen este reliefată în figura 4.8,

în care s-a reprezentat variația tensiunii σ_{yy} în funcție de distanța de la vârful fisurii. Se observă trei zone distincte:

- zona 1 puternic deformată, în care tensiunile depășesc limita de curgere, reprezintă enclava plastică ce se formează la vârful fisurii;

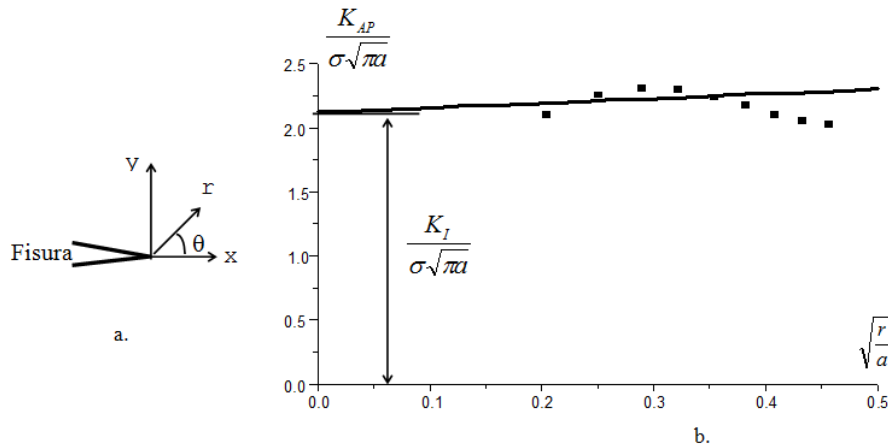


Figura 4.7. Metoda Smith

- zona 2 în care sunt valabile conceptele mecanicii ruperii liniar-elastice, reprezentând regiunea în care singularitatea câmpului de tensiune este predominantă. Smith a arătat că zona 2 se extinde în intervalul $0,2 \leq (r/a)^{1/2} \leq 0,4$, Smith (1970).

- zona 3 care este afectată puternic de condițiile de încărcare și rezemare și este caracterizată de tensiunea nesingulară σ_0 .

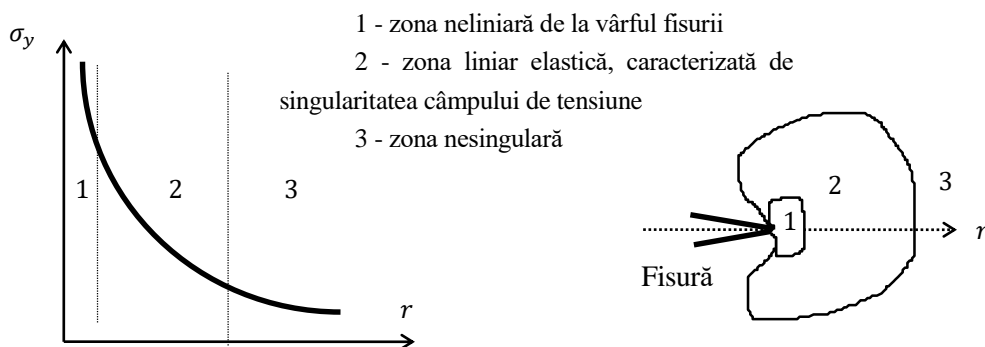


Figura 4.8. Domeniul de validitate a metodei Smith

În concluzie, trasând dreapta de ecuație (4.23) și luând în considerare doar datele ce se încadrează în zona 2, cu măsurarea coordonatei r perpendicular pe direcția fisurii, se

poate determina apoi atât valoarea tensiunii nesingulare σ_0 din panta dreptei trasate, cât și valoarea factorului de intensitate a tensiunii K_I la intersecția dreptei de regresie cu axa $K_{AP}/\sigma\sqrt{\pi a}$, adică pentru $r = 0$.

4.3. Metoda tensometriei electrice rezistive

Determinarea stării de tensiune și de deformare într-un punct de pe suprafața unei structuri cu ajutorul tehnicilor tensometriei electrice, se bazează, în general, pe transformarea variației deformației specifice din punctul respectiv, în variația unei mărimi electrice, prin intermediul unui element de circuit, care poartă numele de traductor. După tipul elementului de circuit folosit ca traductor, tensometria electrică cunoaște mai multe tehnici experimentale: tensometria electro-rezistivă (traductorul fiind un rezistor), tensometria electro-inductivă (traductorul fiind o bobină), tensometria electro-capacitivă (traductorul fiind un condensator) și tensometria semiconductoră (traductorul fiind un semiconductor). Tehnicile tensometrice care utilizează traductoare capacitive și semiconductoră permit determinarea unor deformații foarte mici, cu precizie ridicată.

Față de alte metode de determinare a deformației unui corp solicitat, tensometria electrică prezintă o serie de avantaje, dar și dezavantaje. Ca avantaje trebuie amintite:

- pentru măsurători nu se modifică forma piesei sau structurii,
- se pot efectua măsurători în condiții reale de funcționare a pieselor atât în regim static cât și dinamic de solicitare,
- prezintă sensibilitate și precizie ridicate,
- locul de măsurare al deformației poate fi situat la distanță relativ mare față de locul de înregistrare și prelucrare a datelor,
- datele obținute pot fi stocate, memorate sau transmise (chiar prin radio) la distanțe mari de locul unde se efectuează măsurătorile.

Principalul dezavantaj îl constituie faptul că nu indică zonele cele mai solicitate ale piesei. Stabilirea zonelor de solicitare maximă se face de către utilizator, ceea ce poate implica un mare risc și imprecizie. Rezultate foarte bune se pot obține dacă tensometria electrică se utilizează în combinație cu alte metode experimentale sau chiar analitice, acestea indicând zonele de solicitare maximă.

Tensometria electrică rezistivă este utilizată la diferite aplicații în analiza corpurilor cu fisuri. Pe lângă determinarea stării de deformare și tensiune, există traductoare tensometrice speciale care să identifice inițierea fisurii (figura 4.9.a), respectiv pentru

determinarea vitezei de propagare a fisurii se folosesc traductoare multifir (figura 4.9.b.-d.) la care cunoscând distanța dintre fire se poate estima viteza de propagare a fisurii.

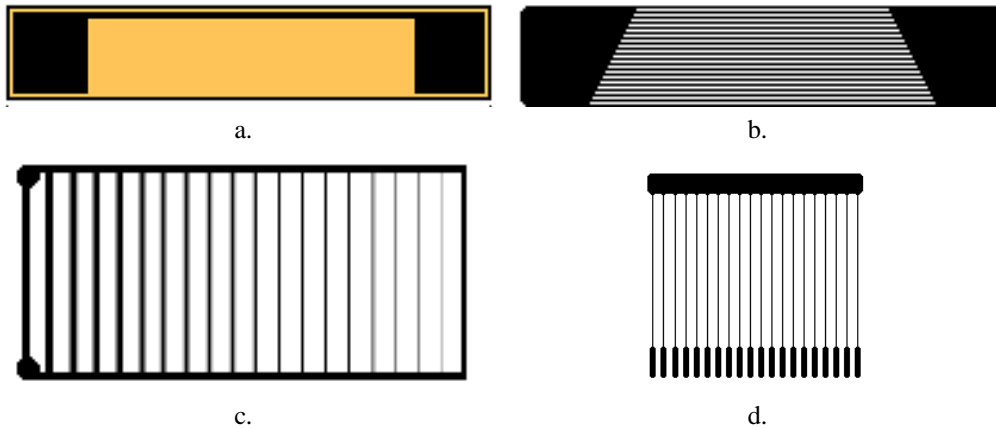


Figura 4.9. Traductoare tensiometrice utilizate pentru detectarea inițierii, respectiv pentru monitorizarea propagării fisurii

Traductoarele de forță și cele pentru măsurarea deplasării de deschidere a flancurilor fisurii utilizate la determinarea tenacității de rupere se bazează de asemenea pe metoda tensometriei electrice rezistive, utilizând punți de traductoare rezistive. De asemenea, la înregistrarea spectrelor de solicitare se folosesc traductoare electrice rezistive.

Algoritm de determinare a factorilor de intensitate a tensiunii folosind un traductor electric rezistiv. Sanford (1979) a generalizat soluția lui Westergaard, considerând o funcție complexă definită ca sumă de două funcții ce pot fi exprimate ca dezvoltări în serii. Câmpul de tensiuni din zona frontului fisurii dintr-un corp infinit, stabilit prin soluțiile analitice anterior menționate, este influențat de modul de încărcare și de geometria corpului studiat. Berger (1986) utilizează tensometria electrică rezistivă pentru determinarea factorului de intensitate al tensiunii. Pornind de la analiza lui Sanford, aceștia stabilesc zona optimă în care se poate determina experimental factorul de intensitate al tensiunii și determină valoarea acestuia, luând în considerare până la doisprezece termeni ai dezvoltării în serie. S-a observat că soluția în trei termeni este suficient de precisă, aceasta fiind mai des utilizată.

Cea mai simplă procedură de a determina factorul de intensitate a tensiunii a fost propusă de Dally și Sanford (1985) folosind un timbru tensometric cu bază mică de măsură poziționat la distanța (r, θ) de vârful fisurii, Fig.4.10. S-a propus exprimarea deformației

specifice $\varepsilon_{x'}$ pe direcția x' , care face unghiul α cu direcția x , prin trei termeni semnificativi: termenul singular $r^{-1/2}$ plus doi termeni nesingulari r^0 , respectiv $r^{1/2}$:

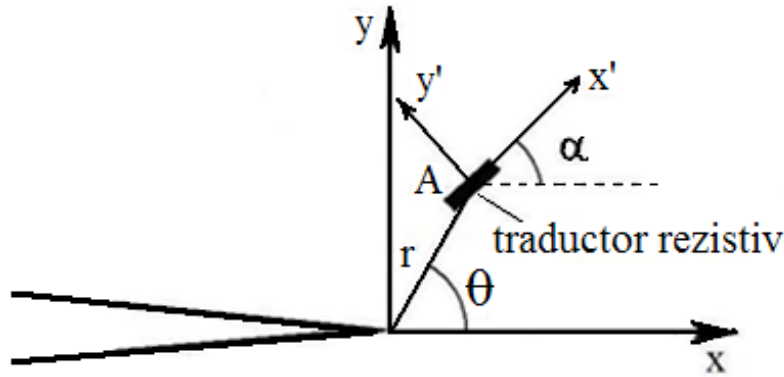


Figura 4.10. Poziționarea traductorului în punctul A

$$2\mu\varepsilon_{x'} = A_0 r^{-\frac{1}{2}} \left(k \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \sin 2\alpha \right) + B_0 (k + \cos 2\alpha) + A_1 r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left(k + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \theta \sin 2\alpha \right) \quad (4.24)$$

unde μ reprezintă modulul de elasticitate transversal, iar $k = (1 - \nu)/(1 + \nu)$, ν fiind coeficientul lui Poisson. Coeficienții necunoscuți A_0 , B_0 și A_1 depind de geometria piesei și de solicitare, coeficientul termenului nesingular fiind exprimat pe baza factorului de intensitate a tensiunii:

$$A_0 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.25)$$

Pentru a determina factorul de intensitate a tensiunii printr-o măsurare ar trebui eliminați termenii nesingulari. Astfel pentru eliminarea lui B_0 :

$$k + \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = -k = -\frac{1 - \nu}{1 + \nu} \quad (4.26)$$

Deci prin rezolvarea ecuației trigonometrice (4.26) se obține unghiul α , care indică direcția de orientare a traductorului.

Pentru eliminarea lui A_1 :

$$\cos \frac{\theta}{2} \left(k + \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} \sin \theta \sin 2\alpha \right) = 0$$

care conduce la:

$$\operatorname{tg}(\theta/2) = -\operatorname{ctg} 2\alpha \quad (4.27)$$

Astfel printr-o poziționare judicioasă a traductorului electric rezistiv, astfel încât să fie satisfăcute condițiile (4.26) și (4.27) pentru unghiurile α și θ , expresia deformației specifice $\varepsilon_{x'}$ depinde doar de K_I și de coordonatele polare (r, θ) ale traductorului:

$$2\mu\varepsilon_{x'} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left(k \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{2} \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \sin \theta \cos \frac{3\theta}{2} \sin 2\alpha \right) \quad (4.28)$$

Această metodologie a fost extinsă apoi de Dally și Berger (1986) pentru determinarea factorilor de intensitate a tensiunii K_I și K_{II} în modul mixt, iar pentru creșterea preciziei determinării s-a propus o metoda supra deterministă Berger și Dally (1988).

4.4. Metoda termoelasticimetriei

4.4.1. Efectul termoelastic

Orice substanță solidă, lichidă sau gazoasă devine mai caldă sau mai rece atunci când își modifică volumul sub acțiunea unei solicitări. Acest fenomen cunoscut sub numele de efectul termoelastic, conduce la încălzire dacă este produs de o solicitare de compresune, respectiv la răcire dacă este produs de o solicitare de întindere.

Variația de temperatură se exprimă sub forma:

$$\Delta T = -\frac{\alpha T}{\rho C_p} (\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y) \quad (4.29)$$

unde α este coeficientul de dilatare termică, T temperatura absolută, ρ densitatea, iar $\Delta\sigma_x$ și $\Delta\sigma_y$ variația tensiunilor.

Efectul termoelastic reprezintă o conversie reversibilă și adiabatică între energia mecanică și cea termică.

4.4.2. Analiza termoelastică a tensiunilor

Prin analiza termoelastică a tensiunilor se măsoară temperatura sau variația temperaturii de pe suprafața unei piese solificate la oboseală. O cameră în infraroșu (IR) permite înregistrarea distribuției variației de temperatură. Schema bloc pentru analiza termoelastică a tensiunilor este prezentată în figura 4.11.

Pentru a extrage variația tensiunilor produse de variația de solicitare un amplificator-corelator corelează semnalul termoelastic cu un semnal de referință preluat de la traductorul

de forță sau de la un timbru tensometric lipit pe piesă. Rezultând astfel amplitudinea semnalului termoelastic și faza. Întregul proces de achiziție este controlat prin intermediul unui calculator. Astfel, variația sumei tensiunilor este proporțională cu amplitudinea semnalului termoelastic S :

$$\Delta\sigma = (\Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y) = (\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_1) = AS \quad (4.30)$$

unde A reprezintă o constantă de calibrare. Constanta de calibrare se determină cunoscând caracteristicile camerei IR, sau se face o calibrare pentru o piesă din același material cu cea investigată dar la care se cunoaște distribuția tensiunii, sau se folosește o rozetă tensometrică și se compară tensiunile măsurate prin tensometrie cu cele termoelastice.

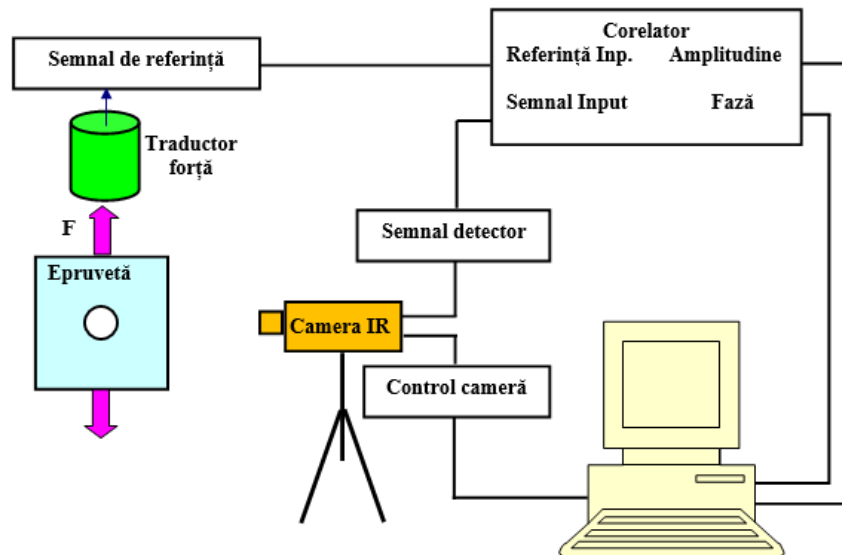


Figura 4.11. Schema bloc a măsurătorilor termoelastice

La ora actuală există mai multe tipuri de camere de infraroșu folosite în analiza termoelastice a tensiunilor și anume:

- cu un detector din Cadmiu - Mercur -Telur (sistemul SPATE) care prin intermediul unui sistem de oglinzi scanează suprafața piesei, figura 4.12.a,
- cu o matrice de detectori Indiu - Stibiu (128x128 sau 256 x 320) care măsoară variația de temperatură în același timp (sistemul DeltaTherm), figura 4.12.b.

Analiza termoelastice a tensiunilor este o metodă de câmp și non contact, care necesită o minimă preparare a suprafeței, vopsirea cu un strat de vopsea neagră pentru

uniformizarea emisivității, acestea fiind principalele avantaje ale metodei. Termoelasticimetria poate măsura variații ale tensiunii de ordinul 1 MPa pentru oțeluri și aliaje de titan, de 0,5 MPa pentru aliaje de aluminiu, respectiv 0,05 MPa pentru rășini epoxidice.

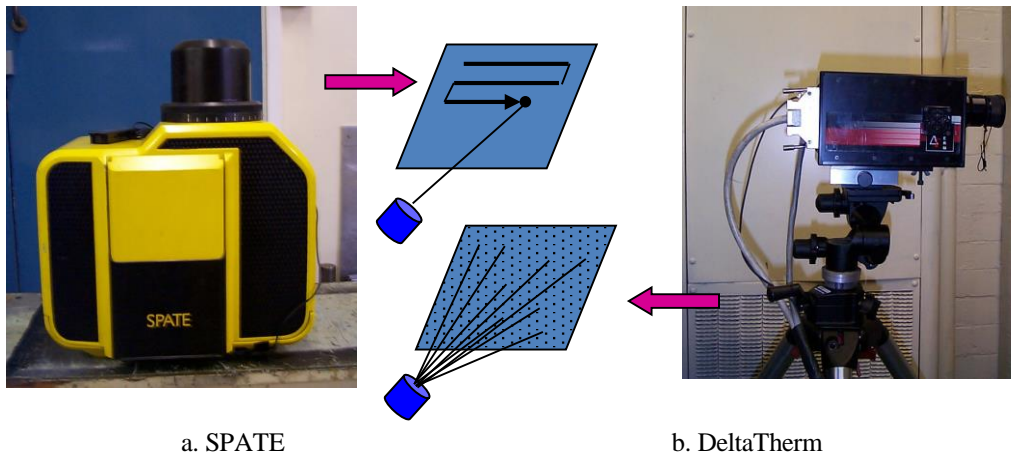


Figura 4.12. Camere IR

4.4.3. Determinarea parametrilor de mecanica ruperii prin termoelasticimetrie

Avantajele oferite de metoda termoelasticimetriei au recomandat utilizarea acesteia la corpurile cu fisuri pentru determinarea variației factorilor de intensitate a tensiunii și a vitezei de propagare a fisurilor. Astfel, pentru o placă solicitată în modul mixt (I și II), figura 4.13, Stanley (1991) a propus o metodologie de determinare a variației factorilor de intensitate a tensiunilor ΔK_I și ΔK_{II} bazată pe termoelasticimetrie.

Variațiile componentelor câmpului de tensiune la vârful fisurii este dată de soluția Irwin:

$$\begin{bmatrix} \Delta\sigma_x \\ \Delta\sigma_y \\ \Delta\tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{\Delta K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \theta \sin \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix} + \frac{\Delta K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

unde $\Delta K_I = K_{I\max} - K_{I\min}$ și $\Delta K_{II} = K_{II\max} - K_{II\min}$ reprezintă variația factorilor de intensitate a tensiunii în modul I respectiv II , iar (r, θ) sunt coordonatele polare pentru un sistem cu originea la vârful fisurii, figura 4.13.

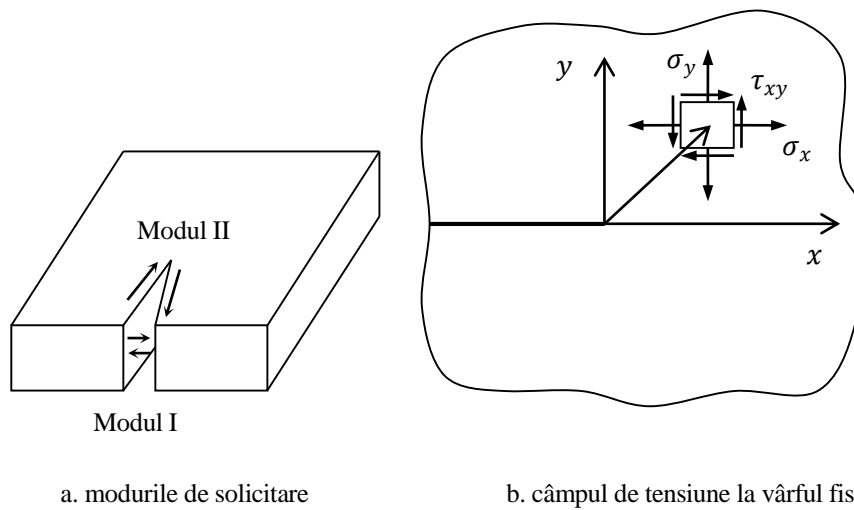


Figura 4.13. Placă solicitată în modul mixt (I și II)

Utilizând un sistem de măsurători termoelastic conform relația (4.30) variația sumei tensiunilor $\Delta(\sigma_x + \sigma_y)$ este proporțională cu semnalul termoelastic S , prin intermediul constantei de proporționalitate A .

Înlocuind expresiile tensiunilor $\Delta\sigma_x$ și $\Delta\sigma_y$ din relația (4.31) în relația (4.30) rezultă:

$$AS = \frac{2\Delta K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{2\Delta K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.32)$$

care indică legătura dintre semnalul termoelastic S și ΔK_I și ΔK_{II} într-un punct de coordonate (r, θ) din vecinătatea fisurilor.

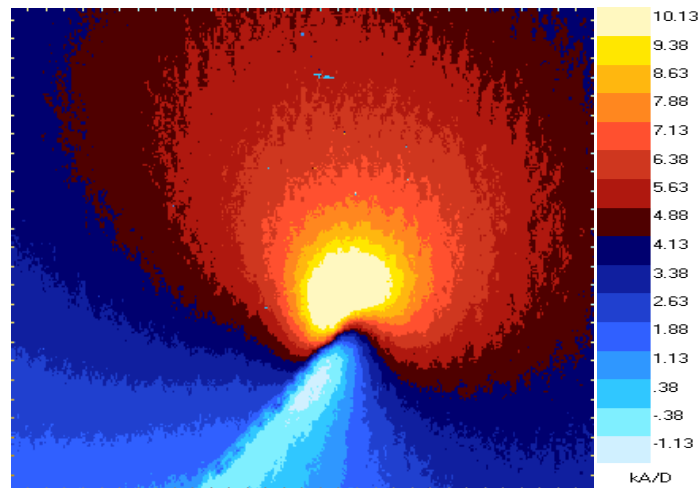


Figura 4.14. Imagine termoelastică specifică modului mixt de solicitare

Relația (4.32) poate fi utilizată pentru determinarea factorilor de intensitate a tensiunii în modurile I, II sau mixt. O imagine termoelastică necalibrată obținută în modul mixt este reprezentată în figura 4.14.

Modul I de încărcare

Corespunzător modului I de solicitare $\Delta K_{II} = 0$ și înlocuind $r = y / \sin \theta$ ecuația (4.32) devine:

$$AS = \frac{2\Delta K_I}{\sqrt{2\pi y}} \sqrt{\sin \theta} \cos \frac{\theta}{2} \quad (4.33)$$

Derivata parțială a semnalului termoelastic S în raport cu unghiul θ se anulează pentru $\theta = 60^\circ$, astfel:

$$S_{max} = \frac{2\Delta K_I}{A\sqrt{2\pi y}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4.34)$$

sau

$$y = \left(\frac{3\sqrt{3}\Delta K_I^2}{4\pi A^2}\right) \frac{1}{S_{max}^2} \quad (4.35)$$

Semnalul termoelastic se interoghează de-a lungul unor linii paralele cu fisura ($y = \text{constant}$), identificându-se semnalul termoelastic maxim de-a lungul acestor linii. Astfel, se observă că y este proporțional cu $1/S_{max}^2$ și dacă se cunoaște constanta de calibrare A factorul de intensitate a tensiunii K_I poate fi obținut din panta curbei $y = f(1/S_{max}^2)$, figura 4.15.

Cu valoarea pantei m obținută prin interpolare se determină ΔK_I din relația:

$$m = \frac{3\sqrt{3}\Delta K_I^2}{4\pi A^2} \Rightarrow \Delta K_I = \sqrt{\frac{4\pi m A^2}{3\sqrt{3}}} \quad (4.36)$$

Metoda are avantajul că nu necesită cunoașterea cu precizie a poziției vârfului fisurii.

Modul II de încărcare

Pentru modul II de solicitare $\Delta K_I = 0$ și înlocuind din nou $r = y / \sin \theta$ din relația (4.32) se obține:

$$AS = -\frac{2\Delta K_{II}}{\sqrt{2\pi y}} \sqrt{\sin \theta} \sin \frac{\theta}{2} \quad (4.37)$$

Derivata parțială a lui S în raport cu θ se anulează și se obține semnalul maxim pentru $\theta = \pm 120^\circ$. Considerând valoarea pozitivă a lui θ relația dintre y și S_{max} devine:

$$y = \left(\frac{3\sqrt{3}\Delta K_{II}^2}{4\pi A^2} \right) \frac{1}{S_{max}^2} \quad (4.38)$$

Relația (4.38) este similară cu relația (4.35) și permite aflarea lui ΔK_{II} cunoscând panta dreptei $y = f(1/S_{max}^2)$ și constanta de calibrare A .

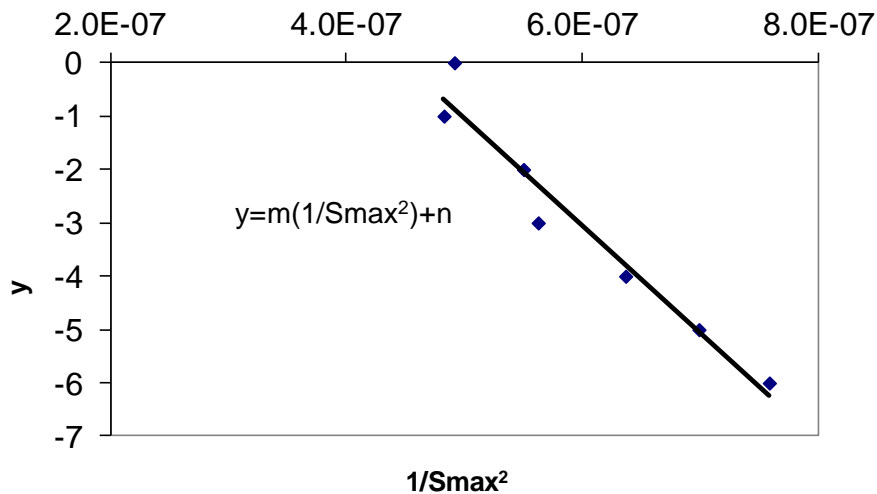


Fig. 4.15. Reprezentarea $y = f(1/S_{max}^2)$ cu panta $(-2 \cdot 10^{-7})$

Modul mixt de încărcare

Stanley și Chen (1996) aplică aceeași metodologie pentru fisuri în modul mixt. Stanley și Dulieu-Smith (1996) investigând fisuri de margine și interior înclinate față de direcția de solicitare arată că locul geometric al punctelor de egal semnal termoelastic este reprezentat de o curbă cardioidă centrată în vârful fisurii. Prin determinarea ariei și orientării acestei curbe se pot obține variațiile factorilor de intensitate a tensiunii, Dulieu-Barton ș.a (2000).

Tomlinson ș.a. (1997) propun o procedură bazată pe compararea soluției analitice Mushkelishvili, cu până la 10 termeni a câmpului de tensiune, din vecinătatea fisurilor cu cea determinată experimental. Un algoritm numeric Newton-Raphson combinat cu metoda celor mai mici pătrate este utilizat pentru obținerea variației factorilor de intensitate a tensiunii și a termenilor nesingulari. Procedura fiind aplicată cu succes pentru fisuri în corpuri solicitate biaxial în modul mixt, Tomlinson și Marsavina (2004).

Bibliografie

- Aradya, K.S.S., Srianth, L.S. (1986) Stress distribution around surface crack. A scattered light photoelastic investigation, *Engineering Fracture Mechanics*, 25, 457-501.
- Berger J.R. (1986) *An improved method of boundary collocation for the analysis of finite body opening mode fracture problems*, MS Thesis, University of Maryland.
- Berger J.R., Dally J.W. (1988) An over-deterministic approach for measuring K_I using strain gages, *Experimental Mechanics* 28, 142-145.
- Berkovits A., Betser A.A., Assa A. (1974) Photoelastic analysis of the stress field surrounding a fatigue crack, *Experimental Mechanics* 14, 64-68.
- Bradley W.B., Kobayashi A.S. (1970) An investigation of propagating cracks by dynamic photoelasticity, *Experimental Mechanics* 10, 106-113.
- Chen Z. (1995) A new photoelastic procedure to determine SIF of mode I crack, *International Journal of Fracture* 69, R89-R82.
- Chen Z., Wang D. (1994) An over-deterministic photoelastic procedure for mode I crack problems, *International Journal of Fracture* 67, R93-R98.
- Dally J.W., Berger J.R. (1986) A strain gage method for determining K_I and K_{II} in a mixed mode stress field, In: *The proceedings of the 1986 SEM Spring conference on experimental mechanics* 603-612.
- Dally J.W., Sanford R.J. (1985) Strain gage methods for measuring the opening mode stress intensity factor K_I , In: *The proceedings of the 1985 SEM Spring conference on experimental mechanics* 851-860.
- Dudderar T.D., Hall P.M., Gilbert J.A., (1985) Holo-interferometric measurement of the thermal deformation response to power dissipation in multilayer printed wiring boards, *Experimental Mechanics* 25, 95-104.
- Dulieu-Barton J.M., Fulton M.C., Stanley P. (2000) The analysis of thermoelastic isopachous data from crack tip stress field, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 23, 301-313.
- Etheridge J.M., Dally J.W. (1977) A critical review of methods for determining stress intensity factors from isochromatic fringes, *Experimental Mechanics* 17, 248-254.
- Freund L.B., Duffy J., Rosakis A.J. (1982) Dynamic fracture initiation in metals and preliminary results on the method of caustics for crack propagation measurements" ASME Paper No. 81-PVP-15, 1-7.

Ghita E., Marşavina L. (2002) *Fotoelasticimetria. Metodă modernă în analiza experimentală a tensiunilor*, Editura Eurostampa, Timișoara.

Gdoutos E.E., Papakaliatakis G. (1982) Photoelastic study of a bimaterial plate with a crack along the interface, *Engineering Fracture Mechanics* 16, 177-187.

Gdoutos E.E., Aifantis E.C. (1986) The method of caustics in environmental cracking, *Engineering Fracture Mechanics* 23, 423-430.

Hyde T.H., Warrior N.A. (1990) An improved method for the determination of photoelastic stress intensity factors using the Westergaard stress function, *International Journal Mechanical Sciences*, 32, 265-273.

Iliescu N., Constantinescu D.M., Pastramă S.D. (1994) Cercetări privind estimarea factorului de intensitate a tensiunii la vârful unei fisuri centrale străpunse, "POLITEHNICA" *Scientific Bulletin*.

Itoh Y.Z., Murakami T., Kashiwaya H. (1988) Proportional extrapolation techniques for determining stress intensity factors, *Engineering Fracture Mechanics* 1988, 297-308.

Kobayashi A.S., Wade B.G., Maiden D.E. (1972) Photoelastic investigation on the crack-arrest capability of a hole; *Experimental Mechanics* 12, 32-37.

Kobayashi A.S., Mall S., Lee M.H. (1976) Fracture dynamics of wedge loaded double cantilever beam specimen, ASTM STP 601, 274-290.

Lee O.S., Hong S.K. (1993) Determination of stress intensity factors and J-integrals using the method of caustics, *Engineering Fracture Mechanics* 44, 981-989.

Marşavina L., Crăciun E.M., Tomlinson R.A. (2008) Combining thermo-photo elasticity for analysis of cracked bodies, *Journal of Optoelectronics and Advanced Materials* 10, 2876-2881.

Marloff R.H., Leven M.M. (1971) Photoelastic determination of stress intensity factors, *Experimental Mechanics*, December 11, 529-539.

Nurse A.D., Patterson E.A. (1990) A photoelastic technique to predict the direction of edge crack extension using blunt cracks, *International Journal Mechanical Sciences* 32, 253-264.

Post D. (1985) Moire interferometry for deformation and strain studies, *Optical Engineering* 24, 663-667.

Rao G. J., Narayanan R. (1989) Photoelastic analysis of mode I stress intensity factor by two Parameter methods, *Engineering Fracture Mechanics* 33, 733-744.

Sanford R.J. (1979) A critical re-examination of the Westergaard method for solving opening-mode crack problems, *Mechanics Research Communications* 6, 289-294.

Schroedel M.A., McGowan J.J., Smith C.W. (1974) Determination of stress Intensity factors from photoelastic data with applications to surface flaw problems, *Experimental Mechanics* 14, 392-399.

Smith C.W., Smith D.G. (1970) A photoelastic evaluation of the influence of closure and other effects upon the local bending stresses in cracked plates, *Internationa Journal of Fracture Mechanics* 6, 305-317.

Smith C.W. (1987) Analytical and Experimental Studies of the Surface Flaw", *SEM Fall Conference on Experimental Mechanics*, Keystone, Colorado, 194-200.

Smith C.W. (1991) *Optical methods of stress analysis applied to cracked components*, Springer Verlag, Berlin.

Smith C.W., Theiss T.J, Rezvani M (1989) Intersection of surface flaws with free surface. An experimental study, ASTM STP 1020, 317-326.

Smith C.W. (1986) Stress-fringe signatures for propagating cracks, *Engineering Fracture Mechanics* 23, 229-236.

Smith C.W., Epstein J.S. (1982) An assessment of far field effects on the photoelastic determination of mixed mode stress intensity factors, *Engineering Fracture Mechanics* 16, 605-612.

Stanley P. (1991) The application of SPATE in Fracture Mechanics, In: *Thermoelastic Stress Analysis*, Editors Harwood N. și Cummings W.M., Ed. Adam Hilger, Bristol, 1991.

Stanley P., Chen W. K. (1996) The determination of stress intensity factors and crack tip velocities from thermoelastic infra-red emissions, *Proceedings of International Conference on Fatigue of Engineering Materials and Structures*, Sheffield, UK, 105-114.

Stanley P., Dulieu-Barton J. M. (1993) Progress in the thermoelastic evaluation of mixed-mode stress intensity factors, *Proceedings of SEM Spring Conference on Experimental Mechanics*, Dearborn, USA, 617-626.

Stanley P., Dulieu-Smith J. M. (1996) The determination of crack-tip parameters from thermoelastic data, *Experimental Techniques* 31, 21-23.

Theocaris P.S. (1972) A new technique for viewing deformation zones at crack tips, *Experimental Mechanics* May 12, 247-249.

Theocaris P.S., Gdoutos E.E. (1975) The size of plastic zones in cracked plates mode of polycarbonate, *Experimental Mechanics* 15, 169-176.

Theocaris P.S., Petrou L. (1986) Inside and outside bounds of validity of the method of caustics in elasticity, *Engineering Fracture Mechanics* 23, 681-693.

Theocaris P.S., Philippidis T.P. (1987) Plastic stress intensity factors in out-of-plane shear by reflected caustics, *Engineering Fracture Mechanics* 27, 299-314.

Theocaris, P.S., Philippidis, T.P. (1989) The exact modes of formation of near-field reflected caustics, *Engineering Fracture Mechanics* 33, 719-732.

Theotokoglu E.N., Tsamasphyros G.J., Spyropoulos C.P. (1989) Photoelastic study of a crack approaching the bonded half-plates interface, *Engineering Fracture Mechanics* 34, 31-42.

Tippur H.V., Rosakis A.J. (1991) Quasi-static and dynamic crack growth along bimaterial interfaces: A note on crack-tip field measurements using coherent gradient sensing, *Experimental Mechanics* 31, 243-251.

Tomlinson R. A., Nurse A. D., Patterson E. A. (1997) On determining stress intensity factors for mixed mode cracks from thermoelastic data, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 20, 217 – 226.

Tomlinson R. A., Marsavina L. (2004) Thermoelastic Investigations for Fatigue Life Assessment, *Experimental Mechanics* 44, 487-494.

5. Calculul durabilității pieselor cu concentratori de tensiune

Deseori, în exploatare, componentele structurale sunt solícitate de sarcini care variază periodic în timp, numite sarcini variabile. În secțiunile puternic solícitate, de exemplu în zona concentratorilor de tensiune, aceste sarcini variabile produc deteriorări (degradări) locale ale materialului la nivel microscopic, a căror acumulare în timp conduce la inițierea și propagarea fisurilor de oboseală și, în final, la ruperea componentei respective. Fenomenul de acumulare a deteriorărilor ca rezultat al solícităților variabile, ce produce în final ruperea componentei structurale, se numește *oboseală*.

În continuare, sunt prezentate particularitățile calculului la oboseală prin două metode clasice (metoda bazată pe analiza tensiunilor și metoda tolerării defectelor), în cazul pieselor cu concentratori de tensiune.

5.1. Coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor. Gradientul tensiunilor

Concentratorii de tensiune de tipul discontinuităților geometrice produc o creștere importantă a tensiunilor și o perturbare a distribuției acestora, mai mult sau mai puțin localizată. Valorile tensiunilor din vecinătatea concentratorului depind atât de dimensiunile și forma concentratorului, cât și de tipul solícitării.

Fenomenul de concentrare a tensiunilor se exprimă prin *coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor*, definit prin relația:

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (5.1)$$

unde σ_{max} reprezintă tensiunea locală maximă la vârful concentratorului, iar σ_{nom} este tensiunea nominală din aceeași secțiune, corespunzătoare aceluiași punct de la vârful concentratorului, dar calculată neglijând efectul acestuia. În funcție de modul în care este calculată tensiunea nominală σ_{nom} , prin considerarea secțiunii nete sau a secțiunii globale (brute), se definește coeficientul teoretic net K_{tn} sau coeficientul teoretic global K_{tg} de concentrare a tensiunilor. În cele două situații, valorile determinate sunt în general diferite.

Astfel definit, ca un factor de multiplicare a tensiunii nominale, K_t reprezintă o măsură a severității fenomenului de concentrare a tensiunilor. Este important de subliniat că deformațiile sunt presupuse a fi elastice, coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor fiind un concept, în mod esențial, elastic. În funcție de geometria piesei și a concentratorului, de tipul solicitării, valorile coeficientului teoretic K_t se determină prin metode analitice pe baza teoriei liniare a elasticității, prin metode numerice, cea mai utilizată fiind metoda elementului finit, sau prin metode experimentale (fotoelasticitate, termoelasticitate, tensometrie electrică rezistivă). Asemenea informații sunt date în îndrumările de proiectare și în monografiile de specialitate, cele mai renumite fiind cele ale lui Neuber (1958), Peterson (1974) sau Pilkey (2005).

În domeniul comportării liniar-elastice a materialului, $\sigma/\varepsilon = E = \text{constant}$, coeficientul teoretic de concentrare K_t caracterizează și fenomenul de concentrare a deformațiilor specifice:

$$K_t = \frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{nom}} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (5.2)$$

Determinarea tensiunii maxime σ_{max} , respectiv a coeficientului teoretic K_t de concentrare a tensiunilor, nu este suficientă pentru cunoașterea câmpului tensiunilor de la baza concentratorului. În plus, este necesară stabilirea gradientului tensiunii, adică a modului în care această tensiune descrește cu distanța, mărime importantă în evaluarea rezistenței la oboseală (figura 5.1). Gradientul tensiunii și existența unei stări biaxiale (sau triaxiale) de tensiune în zona de la vârful creștăturii sunt specifice concentratorilor de tensiune. Acestea explică, în parte, de ce nu se poate estima cu precizie rezistența la oboseală a componentelor cu concentratori utilizând doar coeficientul teoretic de concentrare K_t , Stephens ș.a. (2001).

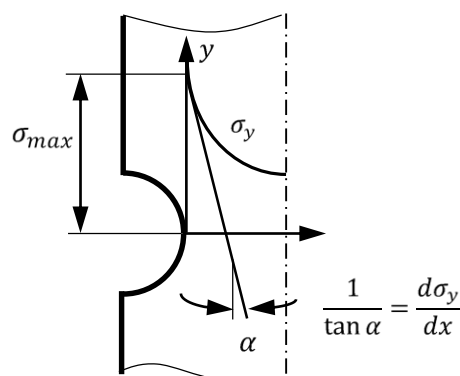


Figura 5.1. Gradientul relativ al tensiunii

După propunerea lui Siebel și Stieler (1955), *gradientul relativ al tensiunii* este definit prin relația:

$$\chi = \frac{1}{\sigma_{max}} \left. \frac{d\sigma}{dx} \right|_{x=x_0} \quad (5.3)$$

unde x_0 este coordonata punctului de tensiune maximă.

Pentru a asigura comparabilitatea diferiților concentratori de tensiune, Filippini (2000) înlocuiește gradientul relativ al tensiunii cu produsul $\rho\chi$, reprezentând gradientul relativ al tensiunii pentru o rază egală cu unitatea la vârful concentratorului.

5.2. Calculul la oboseală pe baza tensiunilor (abordarea $S - N$)

5.2.1. Factorul de reducere a rezistenței la oboseală K_f

Rezistența la oboseală a pieselor cu concentratori de tensiune depinde de geometria concentratorului, de raza de la vârful concentratorului ρ , de rezistența la rupere statică a materialului σ_r și de nivelul solicitării prin tensiunea medie a ciclului de solicitare σ_m , Stephens ș.a. (2001).

În abordarea $S - N$, se ține cont de efectul concentratorilor de tensiune prin *factorul de reducere a rezistenței la oboseală* (sau *coeficient efectiv de concentrare la oboseală*) definit prin relația:

$$K_f = \frac{\sigma_a}{\sigma_{an}} \quad (5.4)$$

unde σ_a reprezintă rezistența la oboseală determinată pe epruvete netede, iar σ_{an} rezistența la oboseală determinată pe epruvete cu un anumit concentrator de tensiune, pentru care secțiunea netă este egală cu secțiunea nominală a epruvetelor netede. În expresia (5.4) a coeficientului de reducere a rezistenței la oboseală K_f , s-a utilizat ca referință amplitudinea ciclului de solicitare. De regulă, coeficientul K_f se definește și se determină pentru ciclul alternant simetric, adică pentru solicitarea variabilă caracterizată prin $R = -1$ și $\sigma_m = 0$, și pentru durabilități de $10^6 \div 10^7$ cicluri.

Legătura dintre coeficientul teoretic K_t și factorul de reducere a rezistenței la oboseală K_f se stabilește prin *coeficientul de sensibilitate* q :

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad (0 < q < 1) \quad (5.5)$$

Sensibilitatea maximă la oboseală se atinge atunci când $K_t = K_f$, prin urmare $q = 1$; pentru $K_f = 1$, aşadar $q = 0$, efectul de concentrare a tensiunilor nu se manifestă.

Prin corelație cu datele experimentale, Neuber (1958) a exprimat coeficientul de sensibilitate prin următoarea relație empirică:

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\rho^*/\rho}} \quad (5.6)$$

unde parametrul de material utilizat ρ^* este legat de dimensiunea grăunților, iar ρ este raza de la vârful concentratorului. Din relațiile (5.5) și (5.6) se obține factorul de reducere a rezistenței la oboseală:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\rho^*/\rho}} \quad (5.7)$$

O relație similară a fost propusă de Peterson (1959), parametrul de material ρ^{**} depinzând de rezistența la rupere statică σ_r a materialului:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{\left(1 + \frac{\rho^{**}}{\rho}\right)} \Rightarrow q = \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho^{**}}{\rho}\right)} \quad (5.8)$$

O relație empirică pentru oțeluri, a fost propusă de Fuchs (1972) sub forma:

$$\rho^{**} = 0,0254 \left(\frac{2070}{\sigma_r}\right)^{1,8} \quad (5.9)$$

Alte relații de calcul pentru coeficientul de reducere a rezistenței la oboseală K_f au fost propuse de Siebel și Stieler (1955), Heywood (1962), Buch (1988), Ye și Wang (1996).

Exprimat prin relațiile (5.7) și (5.9), coeficientul de reducere a rezistenței la oboseală K_f depinde de geometria concentratorului, prin coeficientul teoretic K_t , de raza ρ de la vârful acestuia și de material.

Pentru două oțeluri cu rezistențe diferite, oțelul carbon AISI 1020 cu $\sigma_r = 390 \text{ MPa}$ și oțelul aliat AISI 4130 având $\sigma_r = 810 \text{ MPa}$, efectul razei de la vârful concentratorului este prezentat în figura 5.2. Pentru calculul coeficientului K_f s-a utilizat relația (5.8) propusă de Peterson, parametrul de material ρ^{**} fiind determinat cu relația empirică (5.9): $\rho^{**} = 0,137 \text{ mm}$ pentru AISI 4130, respectiv $\rho^{**} = 0,512 \text{ mm}$ pentru AISI 1020. În cazul razelor mari la vârful concentratorului, valoarea coeficientului de reducere a rezistenței la oboseală K_f se apropie de valoarea coeficientului teoretic K_t , în schimb, pentru raze mici la vârful concentratorului valoarea coeficientului $K_f \ll K_t$.

În general, oțelurile de rezistență ridicată sunt mai sensibile la efectul concentratorilor de tensiune decât oțelurile de rezistență joasă.

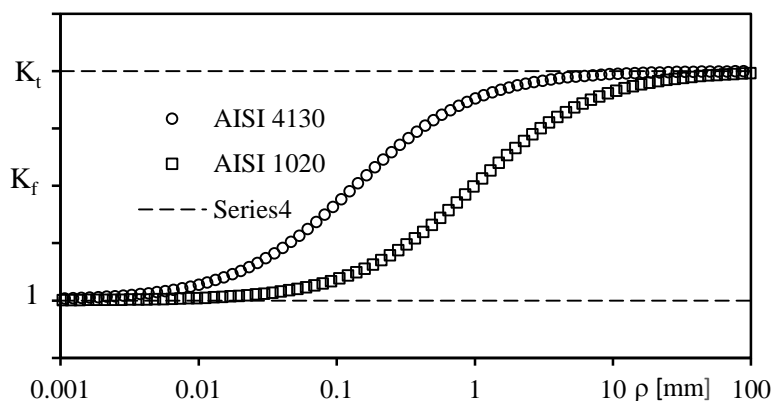


Figura 5.2. Efectul razei ρ de la vârful concentratorului asupra coeficientului de reducere a rezistenței la oboseală K_f pentru două oțeluri cu rezistențe de rupere diferite

Relațiile propuse de Neuber (1958) și Peterson (1959) sunt relații empirice, determinate prin corelarea cu datele experimentale. Coeficientul K_f depinde de geometria concentratorului, de raza de la vârful concentratorului ρ și de rezistența la rupere statică a materialului σ_r .

Coeficientul de sensibilitate q , prin raza ρ de la vârful concentratorului, ține cont de efectul de scară în calculul la oboseală al pieselor. Pentru concentratori similari, cu aceeași geometrie, coeficientul de sensibilitate q crește cu raza ρ de la vârful. Explicația este dată de creșterea volumului finit de la vârful concentratorului care este intens sollicitat.

Coeficientul de reducere a rezistenței la oboseală K_f depinde de rezistența la rupere statică a materialului σ_r , după cum o demonstrează relația (5.9). Influența se explică prin apariția deformațiilor plastice de curgere în zona intens sollicitată, astfel că tensiunea maximă σ_{max} estimată de K_t nu se atinge, într-un material ductil, de rezistență joasă.

5.2.2. Estimarea curbei de durabilitate $S - N$

Inițial, coeficientul K_f s-a utilizat pentru determinarea rezistenței la oboseală σ_{an} , în prezența concentratorilor de tensiune, pentru o sollicitare alternant-simetrică ($R = -1$), în domeniul durabilităților mari, de ordinul $10^6 \div 10^7$ cicluri. Utilizarea coeficientului de reducere a rezistenței la oboseală pentru predicția curbei $S - N$,

conduce la subestimarea acesteia. Acest fapt se explică prin tendința coeficientului K_f de a descrește cu mărirea treptată a nivelului tensiunii, spre domeniul durabilităților mici, și cu apariția deformațiilor plastice de curgere în zona intens solicitată de la vârful concentratorului de tensiune. Astfel, metodele de estimare a curbelor de durabilitate, în general, corectează valoarea coeficientului K_f pentru durabilități medii și mici, Bannantine ș.a. (1997).

Cea mai cunoscută metodă de estimare a curbei $S - N$ pentru epruvetele cu concentratori de tensiune a fost propusă de Juvinall (1967) și este ilustrată în figura 5.3. Metoda este aplicabilă la o varietate largă de materiale și utilizează valorile rezistenței la oboseală determinate pentru două durate de viață: $N = 10^3$ cicluri, respectiv $N_0 = 10^6$ cicluri de solicitare, Pană și Pastramă (2000).

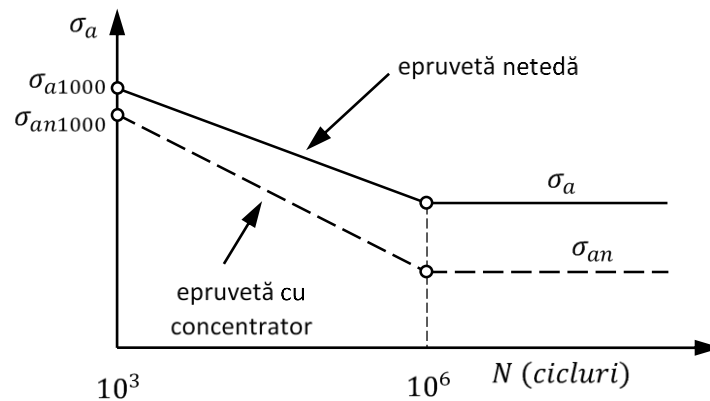


Figura 5.3. Estimarea curbei de durabilitate $S - N$ prin metoda Juvinall (1967)

Rezistența la oboseală pentru epruveta cu concentrator, la durata de viață de 1000 cicluri și $R = -1$, exprimată prin amplitudinea tensiunii, se calculează astfel:

$$\sigma_{an\ 1000} = \frac{\sigma_{a\ 1000}}{K_f'} \quad (5.10)$$

unde $\sigma_{a\ 1000}$ este rezistența la oboseală a epruvetei netede și K_f' este coeficientul de reducere a rezistenței la oboseală la aceeași durabilitate.

O alternativă de calcul este reprezentată de utilizarea rezistenței de rupere statică σ_r , Pană și Pastramă (2000) pentru determinarea $\sigma_{an\ 1000}$:

$$\sigma_{an\ 1000} = \frac{m' \sigma_r}{K_f'} \quad (5.11)$$

unde coeficientul m' se alege în funcție de tipul solicitării (0,9 pentru încovoiere și răsucire, respectiv 0,75 pentru întindere).

Cel de-al doilea punct al curbei de durabilitate $S - N$ se stabilește după relația (5.4) pentru o durată de viață de 10^6 cicluri de solicitare:

$$\sigma_{an} = \frac{\sigma_a}{K_f} \quad (5.12)$$

Curba de durabilitate $S - N$ se reprezintă în coordonate dublu-logaritmice utilizând ecuația Basquin. Pentru durabilități mai mari de 10^6 cicluri curba $S - N$ se estimează printr-o orizontală, Dumitru (2009).

Pentru aprecierea coeficientului K_f' , Juvinall (1967) a stabilit o relație empirică care reprezintă dependența dintre raportul $(K_f' - 1)/(K_f - 1)$ și rezistenței de rupere statică σ_r , pentru o durată de viață de 10^3 cicluri.

Calculul la oboseală pe baza tensiunilor (*abordarea $S - N$*) este recomandată în domeniul durabilităților mari, caracterizat prin deformații elastice și o amplitudine constantă a solicitării. Această metodă nu ține cont de deformațiile plastice, de tensiunile reziduale și modificarea, în consecință, a tensiunii medii în zona intens solicitată de la vârful concentratorului, Bannantine ș.a. (1997).

5.3. Evaluarea durabilității pe baza conceptelor de mecanica ruperii

Procesului de degradare la solicitări variabile îi sunt caracteristice în general trei etape distincte în care se manifestă mecanisme diferite. Aceste etape sunt, după Dumitru și Marșavina (2001):

a. Inițierea fisurii se referă la amorsarea acesteia în jurul unor defecte de material sau pe baza unor mecanisme care au loc la nivelul rețelei cristaline până când microfisura capătă dimensiuni care permit detectarea prin procedeele de control nedistructiv. Cu alte cuvinte, acestei etape îi este caracteristică inițierea microfisurilor și extinderea acestora până la nivelul de macrofisură. Această etapă este extrem de importantă și poate reprezenta aproximativ 70 - 90% din durata de viață a unei piese. În cazul concentratorilor de tensiune, durata etapei de inițiere a fisurii depinde de raza de la vârf.

b. Propagarea fisurii de oboseală. Macrofisura se extinde cu o viteză mai mare sau mai mică în funcție de material și de intensitatea sarcinii aplicate, putând atinge lungimi de la câțiva centimetri până la cele de ordinul metrilor, în funcție de mărimea elementului de rezistență. Apariția unor metode de măsurare moderne, cum ar fi

microscopia electronică, tehnica curenților turbionari, măsurătorile pe baza diferenței de potențial, emisiile acustice etc., au permis elaborarea unor studii complexe asupra acestei etape, care este și cea mai intens studiată până la ora actuală.

c. Ruperea finală se produce atunci când lungimea fisurii atinge o valoare critică la care apare instabilitatea în extensia acesteia.

Cele trei etape pot fi evidențiate prin durabilitățile lor specifice pe o curbă Wöhler (figura 5.4). Pentru o anumită tensiune maximă, numărul de cicluri corespunzător perioadei de inițiere este notat cu N_i , iar cel corespunzător propagării acesteia cu N_p . Durabilitatea totală va fi:

$$N_t = N_i + N_p \quad (5.13)$$

Mulți autori acceptă că numărul de cicluri necesar inițierii fisurii de oboseală N_i este acela pentru care fisura atinge lungimea de aproximativ 0,1 mm. Această lungime a fisurii poate fi ușor detectată cu mijloacele moderne de investigare și este comparabilă cu dimensiunile unor defecte sau chiar cu dimensiunile grăunților cristalini ai unor oțeluri. De asemenea, după atingerea acestei lungimi fisura prezintă o propagare stabilă.

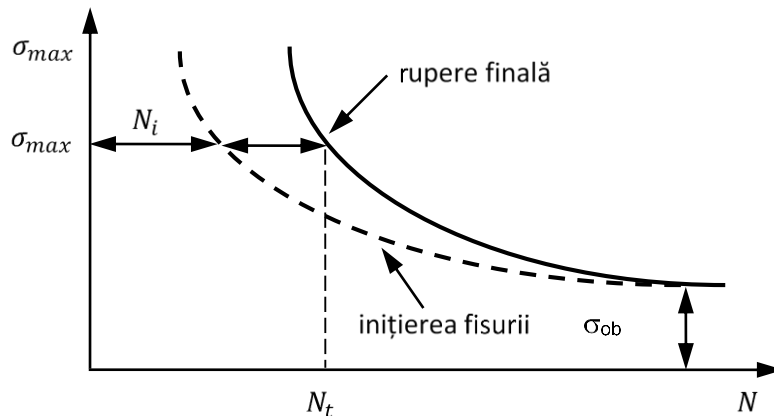


Figura 5.4. Curba de oboseală

5.3.1. Inițierea fisurii de oboseală

Abordarea la nivel microscopic a mecanismelor de inițiere a fisurii reprezintă obiectul multor cercetări de actualitate, Božić ș.a. (2014), Milkota ș.a. (2017).

Chiar dacă tensiunile aplicate sunt mult mai mici decât limita de elasticitate a materialului, local, datorită efectului de concentrare a tensiunilor din jurul unor incluziuni, neomogenități sau goluri, tensiunile pot depăși limita de curgere. În asemenea

zone apar deformații plastice în volume limitate de material unde se inițiază fisurile de oboseală.

De-a lungul timpului s-au dezvoltat mai multe modele care explică inițierea fisurilor sub acțiunea solicitărilor variabile. În continuare, se vor prezenta rezultatele unor studii la nivel microscopic privind condițiile de inițiere ale microfisurilor la vârful creștăturilor ascuțite, raza de la vârful ρ este foarte mică.

Creager și Paris (1967) au stabilit expresiile tensiunilor din vecinătatea unei astfel de creștături pentru modul I de solicitare:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (5.14)$$

Coordonatele r și θ , precum și tensiunile care acționează pe un element de suprafață, sunt indicate în figura 5.5. Pentru $\rho = 0$ se obține termenul singular din soluția Irwin pentru fisură, relația (1.16).

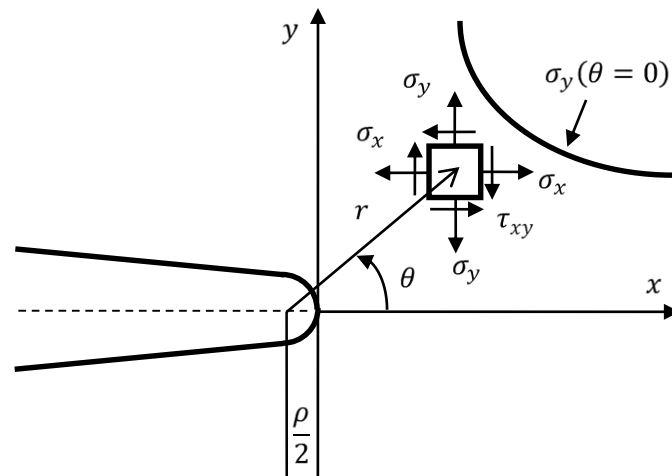


Figura 5.5. Distribuția tensiunii în vecinătatea creștăturii, Creager și Paris (1967)

În soluția (5.14), K_I reprezintă factorul de intensitate a tensiunii existent la vârful unei fisuri cu aceeași lungime cu creștătura considerată, pentru modul I de solicitare. Tensiunea σ_y atinge valoarea maximă pentru $\theta = 0$ și $r = \rho/2$, astfel:

$$\sigma_{max} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{K_I}{\sqrt{\rho}} \quad (5.15)$$

Relația (5.15) indică faptul că pe baza parametrului $K_I/\sqrt{\rho}$ se poate aprecia inițierea unei fisuri de oboseală. Barthelemy (1980) consideră că există o valoare critică $(K_I/\sqrt{\rho})_c$ a acestui raport, sub a căruia valoare fisura nu se poate iniția dintr-o creștătură sau un defect dat. În tabelul 5.1 sunt indicate valorile critice ale raportului $(K_I/\sqrt{\rho})_c$ și domeniul de aplicare, după Barthelemy (1980).

Tabelul 5.1.

| <i>Relația</i> | <i>Domeniul de aplicabilitate</i> |
|---------------------------------------|--|
| $(K_I/\sqrt{\rho})_c = 0,9 R_m$ | $480 \text{ MPa} < R_m < 1080 \text{ MPa}$ |
| $(K_I/\sqrt{\rho})_c = 9,5 \sigma_e$ | $276 \text{ MPa} < \sigma_e < 965 \text{ MPa}$ |
| $(K_I/\sqrt{\rho})_c = 206,9/\lambda$ | $\sigma_e > 965 \text{ MPa}$ |

În expresiile prezentate, R_m reprezintă rezistența la rupere, σ_e este limita de elasticitate, iar λ este coeficientul de ecrusare al materialului.

În multe cazuri se pune problema stabilirii numărului de cicluri N_i necesar inițierii fisurii de oboseală. Acest număr de cicluri este dificil de stabilit întrucât nu există până la ora actuală o delimitare clară a unei granițe între stadiul de inițiere și cel de propagare a unei fisuri de oboseală. În cele ce urmează, vom prezenta totuși unele dintre metodele clasice folosite în mod curent, Forman (1968). Conform acestei metode, numărul de cicluri necesar pentru inițierea fisurii este dat de relația:

$$\log N_i = C^* + D \log \sqrt{E \sigma_{max} \varepsilon_{amp}} \quad (5.16)$$

unde C^* și D sunt constante de material, E este modulul de elasticitate longitudinal, σ_{max} este tensiunea maximă la vârful concentratorului, iar ε_{amp} reprezintă amplitudinea deformației locale pe direcția de solicitare.

Pentru o piesă din oțel cu 0,2% C, având o creștătură cu raza de la vârf $\rho = 2 \text{ mm}$, din relația coeficientului de reducere a rezistenței la oboseală, Neuber (1958):

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\rho^*/\rho}} \quad (5.17)$$

se calculează numărul de cicluri pentru ca fisura să ajungă la lungimea de 0,1 mm:

$$\log K_f = 1,2969 - 0,1602 \log N_i \quad (5.18)$$

unde parametrul de material $\rho^* = 0,32$ pentru un oțel moale.

Tanaka și Mura (1981) au propus pentru determinarea numărului de cicluri la inițierea fisurii de oboseală un model bazat pe teoria dislocațiilor. Modelul a fost dezvoltat de Božić ș.a. (2014) și Mlikota ș.a. (2017) pentru diferite aplicații: îmbinări sudate, flanșe etc. Conform acestui criteriu numărul de cicluri de inițiere a fisurii se determină cu relația:

$$N_i = \frac{8 \mu W_c}{\pi(1 - \nu)d(\Delta\bar{\tau} - 2\tau_{cr})^2} \quad (5.19)$$

unde μ reprezintă modulul de elasticitate de transversal, ν este coeficientul lui Poisson, W_c este energia pentru inițierea fisurii, $\Delta\bar{\tau}$ este media variației tensiunii tangențiale, iar τ_{cr} este tensiunea tangențială critică, această valoare determinându-se prin analiză cu elemente finite la nivelul structurii grăunților din vecinătatea concentratorilor de tensiune.

5.3.2. Propagarea fisurilor sub acțiunea solicitărilor variabile

A. Propagarea fisurii la solicitări variabile cu amplitudine constantă

Evoluția unei fisuri în cursul propagării sale poate fi urmărită cel mai simplu reprezentând lungimea fisurii a în funcție de numărul de cicluri aplicat N , figura 5.6. Asemenea diagrame se pot construi prin puncte sau se pot înregistra utilizând o serie de tehnici experimentale. Trasarea diagramei $a - N$ constituie o problemă de bază în Mecanica ruperii, deoarece pe baza acesteia se poate aprecia durata de viață a unui element de rezistență sau a unei structuri în care s-a inițiat o fisură detectabilă. Analizând figura 5.6 se pot identifica mărimile reprezentative în evaluarea propagării unei fisuri, și anume:

- a_0 este lungimea fisurii inițiale;
- a_{cr} reprezintă lungimea critică a fisurii la care se produce ruperea finală;
- N_{cr} este numărul de cicluri necesar pentru propagarea până la rupere a unei fisuri cu lungimea inițială a_0 .

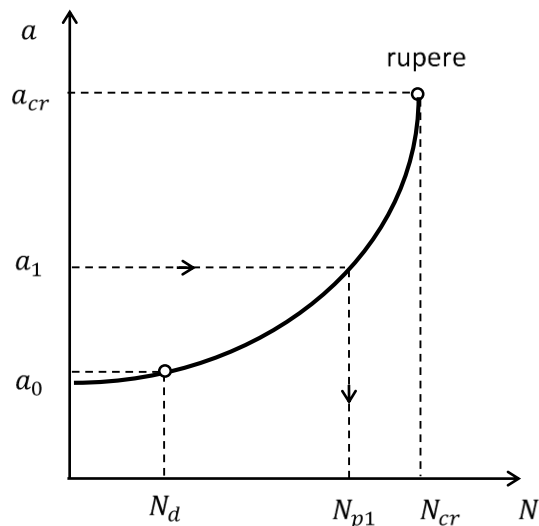


Figura 5.6. Variația lungimii fisurii în funcție de numărul de cicluri

Astfel pentru propagarea unei fisuri având lungimea inițială a_0 până la lungimea a_1 , numărul de cicluri necesar este N_{p1} , figura 5.6. Trebuie menționat, în funcție de tehnica experimentală folosită, că lungimea fisurii inițiale a_0 poate să nu corespundă cu lungimea minimă a fisurii detectabilă prin metode nedistructive a_d .

Curbele de variație ale lungimii fisurii în funcție de numărul de cicluri se pot trasa pentru mai multe niveluri ale tensiunii maxime pentru aceeași lungime a fisurii inițiale (figura 5.7) sau pentru mai multe lungimi ale fisurii inițiale pentru același nivel al tensiunii maxime (figura 5.8).

Unul dintre parametrii de bază prin care se apreciază ruperea la oboseală este viteza de propagare a fisurii da/dN , reprezentând lungimea cu care se propagă fisura pentru un ciclu de solicitare.

Pentru diferite lungimi ale fisurii, viteza de propagare se obține calculând panta diagramei $a - N$ (figura 5.7 și figura 5.8). Din figurile 5.7 și 5.8 se evidențiază că viteza de propagare a fisurii da/dN depinde de lungimea fisurii inițiale și de nivelul sau amplitudinea tensiunii aplicate, mărimi care intervin în expresia factorului de intensitate a tensiunii K . În principiu, o dată cu creșterea lungimii fisurii inițiale, respectiv cu majorarea nivelului de solicitare, crește și viteza de propagare a fisurii de oboseală. Pornind de la această observație, a apărut ideea că viteza de propagare a fisurii de oboseală poate fi corelată cu variația factorului de intensitate a tensiunii ΔK .

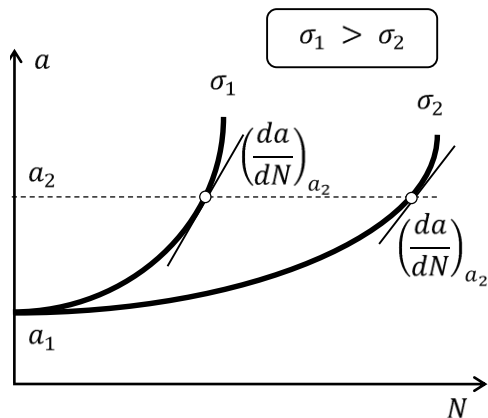


Figura 5.7. Creșterea lungimii fisurii pentru două niveluri de solicitare diferite

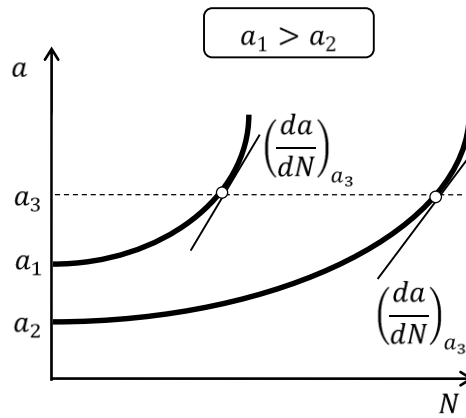


Figura 5.8. Creșterea lungimii fisurii pentru două lungimi inițiale diferite

B. Corelații între viteza de propagare a fisurii și variația factorului de intensitate a tensiunii

Diagramele $da/dN - \Delta K$ se reprezintă uzual în coordonate dublu-logaritmice. Forma generală a diagramei de variație a vitezei de propagare a fisurii de oboseală în funcție de variația factorului de intensitate a tensiunii este prezentată în figura 5.9. Sunt caracterizate, în continuare, cele trei domenii distincte ale diagramei.

Domeniul I se caracterizează prin scăderea vitezei de propagare a fisurii pe măsură ce se micșorează variația factorului de intensitate a tensiunii, până la valoarea de prag ΔK_{th} . Pentru amplitudini ale solicitării sub valoarea ΔK_{th} , fisura nu se mai propagă. Factorii principali care influențează direct procesul de propagare a fisurii în acest domeniu sunt: microstructura, tensiunea medie a ciclului de solicitare și mediul de lucru.

Viteza de propagare a fisurii se exprimă în funcție de variația factorului de intensitate a tensiunii și a limitei de prag astfel, Klesnil și Lukáš (1972a):

$$\frac{da}{dN} = C_1 (\Delta K - \Delta K_{th})^{m_1} \quad (5.20)$$

unde C_1 și m_1 sunt constante de material, iar ΔK_{th} este valoarea de prag a variației factorului de intensitate a tensiunii sub care fisura nu se propagă.

În ceea ce privește valoarea de prag ΔK_{th} , în literatură sunt indicate o serie de relații de calcul, după cum urmează:

$$\Delta K_{th} = 7,03(1 - 0,85R) \quad (5.21)$$

unde R este coeficientul de asimetrie al ciclului de solicitare, Barsom (1974);

$$\Delta K_{th} = \frac{1,2 \Delta K_{th,0}}{1 + 0,2 \frac{1+R}{1-R}} \quad (5.22)$$

cu ΔK_{th0} valoarea de prag pentru un ciclu pulsant de solicitare, McEvily (1973);

$$\Delta K_{th} = \Delta K_{th0}(1 - R)^\gamma \quad (5.23)$$

unde γ este o constantă de material, Klesnil și Lukáš (1972b).

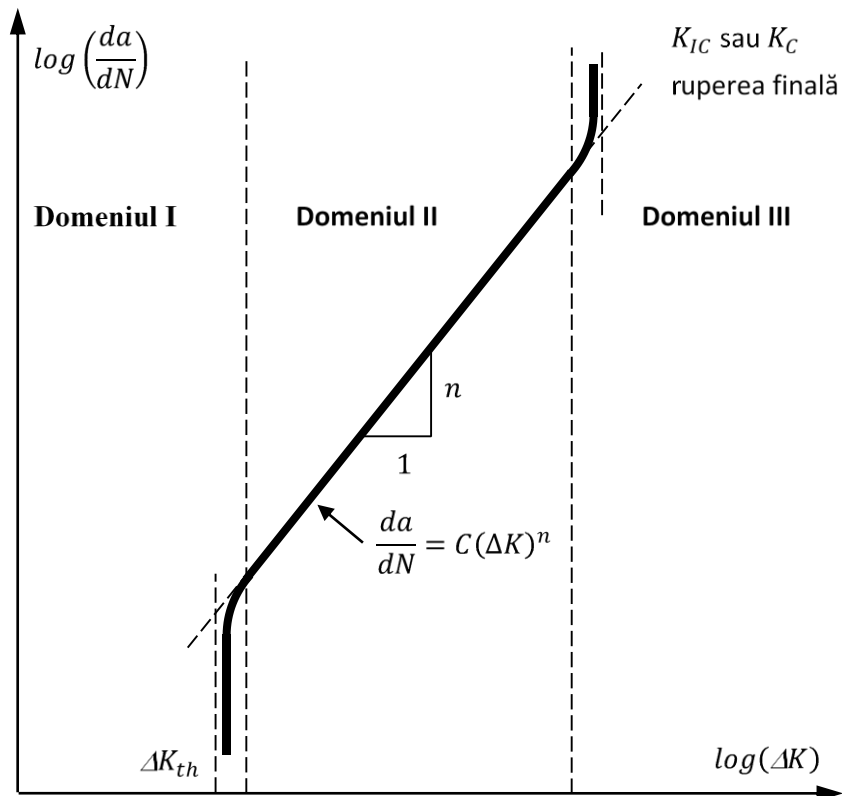


Figura 5.9. Variația vitezei de propagare a fisurii în funcție de variația factorului de intensitate a tensiunii

Domeniul II are o extindere mai mare și se caracterizează prin faptul că propagarea fisurii de la un ciclu la altul are un caracter stabil. Microstructura are o

influență redusă asupra vitezei de propagare a fisurii de oboseală, dar crește influența efectului combinat al tensiunii medii, frecvenței și mediului de lucru. În acest domeniu, viteza de propagare a fisurii este corelată cu variația factorului de intensitate a tensiunii prin “legea lui Paris”, Paris și Erdogan (1960):

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^n \quad (5.24)$$

unde $\Delta K = K_{max} - K_{min} = K(\sigma_{max}) - K(\sigma_{min})$ reprezintă variația factorului de intensitate a tensiunii, iar C și n sunt constante de material. În tabelul 5.2 sunt indicate câteva valori ale constantelor C și n după Barthelemy (1980), Dumitru și Marșavina (2001), Manson Halford (2006) pentru unele oțeluri și aliaje.

Tabelul 5.2.

| <i>Materialul</i> | C $\left[\frac{m}{\text{ciclu}} (MPa\sqrt{m})^{-n}\right]$ | n [-] |
|---------------------------------|---|------------|
| Oțeluri martensitice | $1,35 \cdot 10^{-10}$ | 2,25 |
| Oțeluri ferito-perlitice | $6,9 \cdot 10^{-12}$ | 3,0 |
| Oțeluri austenitice inoxidabile | $5,6 \cdot 10^{-12}$ | 3,25 |

Forma relativ simplă a ecuației (5.24) a permis să se facă o serie de estimări ale durabilității la solicitări variabile la acele materiale la care constantele C și n au fost obținute prin încercări experimentale. Pe de altă parte, trebuie menționat faptul că s-a încercat îmbunătățirea predicțiilor prin luarea în considerare a unor parametrii, cum ar fi coeficientul de asimetrie R al ciclului de solicitare și tenacitatea la rupere K_C . Una dintre aceste modificări a fost propusă de Walker (1970):

$$\frac{da}{dN} = C[\Delta K(1 - R)^{m-1}]^n \text{ pentru } R \geq 0 \quad (5.25)$$

$$\frac{da}{dN} = C[K_{max}(1 - R)^{1-m}]^n \text{ pentru } R < 0 \quad (5.26)$$

Această formulare a vitezei de propagare a fisurii aduce câteva avantaje față de legea lui Paris și anume: utilizarea factorului maxim de intensitate a tensiunii este mai

potrivită pentru cicluri cu $R < 0$; considerarea efectului tensiunii medii prin intermediul coeficientului de asimetrie R al ciclului de solicitare.

Forman ș.a. (1967) aduc îmbunătățiri ecuației propusă de Walker, incluzând tenacitatea la rupere K_C pentru partea superioară a curbei da/dN în apropierea rupei finale:

$$\frac{da}{dN} = \frac{C \Delta K^n}{(1-R)K_C - \Delta K} \quad (5.27)$$

NASA implementează ecuația NASGROW în soft-ul dezvoltat, folosit la predicția durabilității componentelor aeronautice:

$$\frac{da}{dN} = C \left[\left(\frac{1-f}{1-R} \right) \Delta K \right]^n \frac{\left(1 - \frac{\Delta K_{th}}{\Delta K} \right)^p}{\left(1 - \frac{K_{max}}{K_{crit}} \right)^q} \quad (5.28)$$

unde C , n , p și q sunt parametrii determinați empiric, iar:

$$f = \frac{K_{des}}{K_{max}} = \begin{cases} \max(R, A_0 + A_1R + A_2R^2 + A_3R^3) & \text{pentru } R \geq 0 \\ A_0 + A_1R & \text{pentru } -1 \leq R < 0 \\ A_0 - 2A_1 & \text{pentru } R < -1 \end{cases} \quad (5.29)$$

Coeficienții din relația (5.29) sunt:

$$\begin{aligned} A_0 &= (0,825 - 0,34\alpha + 0,05\alpha^2) \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{max}}{\sigma_C}\right) \right]^{\frac{1}{\alpha}} \\ A_1 &= (0,415 - 0,07\alpha) \frac{\sigma_{max}}{\sigma_C} \\ A_2 &= 1 - A_0 - A_1 - A_3 \\ A_3 &= 2A_0 + A_1 - 1 \end{aligned} \quad (5.30)$$

unde α ține cont de starea plană de tensiune sau deformație, iar σ_{max}/σ_C ține cont de raportul dintre tensiunea maximă aplicată și limita de curgere.

Domeniul III se caracterizează prin viteze de propagare mari ale fisurii de oboseală, fapt care conduce la o extindere instabilă a acesteia. Fisura crește rapid de la un ciclu la altul, până la atingerea lungimii critice a fisurii când se produce ruperea finală. Testele experimentale au dovedit că în multe cazuri cele trei domenii se reduc la unul singur. Pornind de la acest aspect s-au propus o serie de relații care descriu complet

diagrama $da/dN = f(\Delta K)$. Dintre acestea, ecuația propusă de Austen (1977), pentru oțeluri de construcții este binecunoscută:

$$\frac{da}{dN} = \frac{\Delta K^2}{4\pi E \sigma_e} \left(\frac{\Delta K - \Delta K_{th}}{K_{IC} - \frac{\Delta K}{1-R}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.31)$$

unde σ_e este limita de elasticitate, iar E este modulul de elasticitate longitudinal.

Utilizarea vitezei de propagare a fisurii pentru calculul durabilității implică însă o serie de studii experimentale pentru determinarea constantelor de material C , n , m etc.

Bibliografie

Austen I.M. (1977) A basic relationship for the prediction of fatigue crack growth behavior, British Steel Corporation Research, Report PT/6795/8/77/A.

Bannantine J.A., Comer J.J., Handrock J.L. (1997) *Fundamentals of metal fatigue analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Barsom J.M. (1974) Fatigue Behavior of Pressure Vessel Steels, WRC Bulletin 194, Welding Research Council, New York, 1974.

Barthelemy B. (1980) Notions pratique de mecanique de la rupture, Editions Eyrolles.

Božić Ž., Schmauder S., Mlikota M., Hummel M., (2014) Multiscale fatigue crack growth modeling for welded stiffened panels, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 37, 1043–1054.

Buch A. (1988) *Fatigue Strength Calculation*, Trans Tech Publications, Switzerland.

Creager M., Paris P.C. (1967) Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, *International Journal of Fracture Mechanics* 3, 247-252.

Dumitru I. (2009) *Bazele calculului la oboseală*, Editura Eurostampa, Timișoara.

Dumitru I., Marșavina L. (2001) *Introducere în Mecanica ruperii*, Editura Mirton, Timișoara.

Filippini M. (2000) Stress gradient calculations at notches, *International Journal of Fatigue* 22, 397-409.

Forman R.G. (1968) Study of fatigue crack initiation from flaws using fracture mechanics theory, AFFDL-TR-68-100, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton.

Forman R.G., Keary V.E., Engle R.M. (1967) Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures, *Journal of Basic Engineering* 89, 151-183.

Fuchs H.O. (1972) Regional tensile stress as a measure of the fatigue strength of notched parts, *Proceedings of the 1971 International Conference on the Mechanical Behavior of Materials*, Kyoto, Japan, 478.

Heywood R.E. (1962) *Designing Against Fatigue*, Chapman & Hall, London.

Juvinall R.C. (1967) *Engineering considerations of stress, strain and strength*, McGraw Hill Series in Mechanical Engineering, New York.

Klesnil M.K., Lukáš P. (1972a) Influence of strength and stress history on crack growth and stabilisation of fatigue crack, *Engineering Fracture Mechanics* 4, 77-92.

Klesnil M.K., Lukáš P. (1972b) Effect of stress cycle asymmetry on fatigue crack growth, *Material Science and Engineering* 9, 231-240.

Manson S.S., Halford G.R. (2006) *Fatigue and Durability of Structural Materials*, ASM International, Materials Park, Ohio.

McEvily A.J. (1973) Significance of defects in welded structures, Proceedings of the Japan - US Seminar, Tokyo, Japan, University of Tokyo Press.

Mlikota M., Schmauder S. (2017) Numerical Determination of component Wöhler Curve, DVM-Bericht 1684, 111-124.

Neuber H. (1958) *Theory of Notch Stresses*, Springer-Verlag, Berlin.

Pană T., Pastramă S.D. (2000) *Integritatea structurilor mecanice*, Editura Fair Partners, București.

Paris P.C., Erdogan F. (1960) A critical analysis of crack propagation laws, *Journal of Basic Engineering* 85, 528-534.

Peterson R.E. (1959) Notch-sensitivity, in: *Metal Fatigue* (ed. Sines G., Waisman J.L.), McGraw Hill, New York, 293-306.

Pilkey W.D. (2005) *Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices*, 2nd edition, John & Sons, New Jersey.

Peterson R.E. (1974) *Stress Concentration Factors*, John Wiley & Sons, New York.

Siebel E., Stieler M. (1955) Ungleichformige Spannungsverteilung bei schwingender Beanspruchung, *VDI Z* 97, 121-126.

Stephens R.I., Fatemi A., Stephens R.R., Fuchs H.O. (2001) *Metal Fatigue in Engineering*, second edition, John Wiley & Sons.

Tanaka K., Mura T. (1981), A dislocation model for fatigue crack initiation, *Journal of Applied Mechanics* 48, 97-103.

Walker C. (1970) The effect of stress ratio during crack propagation and fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum, ASTM STP 462, American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, USA.

Ye D.Y., Wang D.J. (1996) A new approach to the prediction of fatigue notch reduction factor K_f , *International Journal of Fatigue* 18, 105-109.

6. Soluții pentru calculul tensiunilor din zona de la vârful concentratorilor

6.1. Soluția Williams pentru concentratori în formă de V singurari (cu raza de racordare la vârf egală cu zero)

Williams (1952) a demonstrat existența tensiunilor singulare pentru concentratorii ascuțiți a căror rază la vârf $\rho = 0$. În cazul limită $2\alpha = 2\pi$, concentratorul ascuțit devine o fisură, iar situația $2\alpha = \pi$ corespunde unui corp neted, fără concentrator de tensiune. Pentru cazurile intermediare, $\pi < 2\varphi < 2\pi$, se obține cazul unui concentrator lateral ascuțit, figura 6.1.

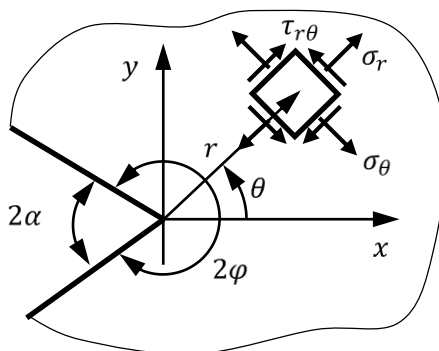


Figura 6.1. Crestătura V cu raza la vârf egală cu zero

Prezentarea detaliată a soluției propusă de Williams se găsește în lucrările lui Barber (2002) și Constantinescu (2003).

Într-o analiză liniar-elastică, în starea plană de tensiune, Williams a considerat o funcție de tensiune biarmonică $\Phi(r, \theta)$ de forma:

$$\Phi(r, \theta) = r^{\lambda+1} F(\theta, \lambda) \quad (6.1)$$

unde parametrul λ este nedeterminat. Condiția de continuitatea a deplasărilor impune $\lambda > 0$, adică o valoare pozitivă a parametrului. Pentru funcția $F(\theta, \lambda)$, Williams a acceptat o formă care satisface ecuația biarmonică, și anume:

$$F(\theta, \lambda) = A \cos(\lambda - 1)\theta + B \cos(\lambda + 1)\theta + C \sin(\lambda - 1)\theta + D \sin(\lambda + 1)\theta \quad (6.2)$$

unde constantele A , B , C și D sunt nedeterminate.

Expresiile tensiunilor în coordonate polare, cu funcția de tensiune astfel definită, sunt:

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} = r^{\lambda-1} [F''(\theta, \lambda) + (\lambda + 1)F(\theta, \lambda)] \\ \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \Phi(r, \theta)}{\partial r^2} = r^{\lambda-1} [\lambda(\lambda + 1)F(\theta, \lambda)] \\ \tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi(r, \theta)}{\partial r \partial \theta} = r^{\lambda-1} [-\lambda F'(\theta, \lambda)] \end{cases} \quad (6.3)$$

cu derivatele $F'(\theta, \lambda)$ și $F''(\theta, \lambda)$ în raport cu variabila θ .

Pe cele două muchii libere nesolicitate, adică pentru $\theta = \pm\varphi$, condițiile la limită în tensiuni sunt:

$$\begin{cases} \sigma_\theta(r, \varphi) = \sigma_\theta(r, -\varphi) = 0 \\ \tau_{r\theta}(r, \varphi) = \tau_{r\theta}(r, -\varphi) = 0 \end{cases} \quad (6.4)$$

Din (6.3) și (6.4), rezultă:

$$F(\varphi, \lambda) = F(-\varphi, \lambda) = F'(\varphi, \lambda) = F'(-\varphi, \lambda) = 0 \quad (6.5)$$

Condițiile la limită (6.5) conduc la sistemul de ecuații liniare și omogene:

$$\begin{bmatrix} \cos(\lambda - 1)\varphi & \cos(\lambda + 1)\varphi & 0 & 0 \\ \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin(\lambda - 1)\varphi & \sin(\lambda + 1)\varphi & \sin(\lambda - 1)\varphi & \sin(\lambda - 1)\varphi \\ 0 & 0 & \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin(\lambda - 1)\varphi & \cos(\lambda + 1)\varphi \\ 0 & 0 & \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1} \sin(\lambda - 1)\varphi & \cos(\lambda + 1)\varphi \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

Primele două ecuații ale sistemului (6.6) corespund modului I de solicitare, iar ultimele două modului II de solicitare, constantele A și B fiind independente de constantele C și D . Pentru o soluție netrivială, determinantul sistemului (6.6) trebuie să fie egal cu zero, rezultând ecuațiile caracteristice:

$$F(\varphi, \lambda) = F(-\varphi, \lambda) = F'(\varphi, \lambda) = F'(-\varphi, \lambda) = 0 \quad (6.7a)$$

sau

$$F(\varphi, \lambda) = F(-\varphi, \lambda) = F'(\varphi, \lambda) = F'(-\varphi, \lambda) = 0 \quad (6.7b)$$

unde s-a notat $q = (2\pi - 2\alpha)/\pi$. Semnul $+$ corespunde modului I, iar semnul $-$ corespunde modului II; ecuațiile (6.7) determină valorile proprii λ în funcție de unghiul φ (respectiv α).

Pentru modul de solicitare, câmpul tensiunilor la baza creștăturii, reprezentat prin relațiile (6.3), este singular atunci când $(\lambda - 1) < 0$, adică $\varphi > \pi/2$. Pentru modul anti-simetric II, singularitatea este atinsă pentru $\varphi > 128,7^\circ$, Hills (2004).

Dacă se înlocuiesc valorile proprii în ecuațiile sistemului (6.6), se obține raportul A/B pentru modul I, respectiv C/D pentru modul II, și, în final, expresiile tensiunilor în funcție de unghiul θ , ca o combinație liniară a soluțiilor particulare.

Pentru modul I, dacă se reține doar termenul singular, obținut pentru cea mai mică valoare proprie λ , tensiunile la vârful concentratorului ascuțit sunt, Seweryn (1996) sunt:

$$\begin{cases} \sigma_r(r, \theta) = \frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} \left[\frac{3-\lambda}{1+\lambda} \cos(1+\lambda)\varphi \cdot \cos(1-\lambda)\theta + \cos(1-\lambda)\varphi \cdot \cos(1+\lambda)\theta \right] \\ \sigma_\theta(r, \theta) = \frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} [\cos(1+\lambda)\varphi \cdot \cos(1-\lambda)\theta - \cos(1-\lambda)\varphi \cdot \cos(1+\lambda)\theta] \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) = \frac{K_I^V}{(2\pi r)^{1-\lambda} C_1} \left[\frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cos(1+\lambda)\varphi \cdot \sin(1-\lambda)\theta - \cos(1-\lambda)\varphi \cdot \sin(1+\lambda)\theta \right] \end{cases} \quad (6.8)$$

unde $C_1 = \cos(1+\lambda)\varphi - \cos(1-\lambda)\varphi$, iar K_I^V este factorul de intensitate a tensiunii pentru creștătura ascuțită (singulară):

$$K_I^V = (2\pi)^{1-\lambda} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda} \sigma_\theta(r, \theta = 0) \quad (6.9)$$

Termenul $(\lambda - 1)$ reprezintă ordinul singularității și se determină complet pentru deschiderea unghiulară 2α a creștăturii, împreună cu funcția $F_I(\theta, \lambda)$, prin analiză asimptotică. Factorul de intensitate a tensiunii K_I^V depinde de geometria globală a componente și de modul de încărcare, determinându-se practic prin ajustarea soluției asimptotice la starea de tensiune locală, determinată în mod obișnuit printr-o analiză cu elemente finite.

Într-un mod similar, Gross și Mendelson (1972) au definit factorul de intensitate a tensiunii pentru concentratorul ascuțit sollicitat în modul I, astfel:

$$K_I^V = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda} \sigma_\theta(r, \theta = 0) \quad (6.10)$$

Cele două definiții ale factorului de intensitate a tensiunii K_I^V coincid doar pentru cazul fisurii, adică $\varphi = \pi$.

6.2. Soluția Creager-Paris pentru concentratorul adânc și subțire (cu raza de racordare la vârf mică)

Creager și Paris (1967) au demonstrat că pentru un concentrator adânc și subțire, a cărei rază la vârf ρ este mică, se poate descrie câmpul elastic al tensiunilor prin factorului de intensitate a tensiunii K într-o formă echivalentă cu cea utilizată pentru fisuri. Astfel, într-un sistem de coordonate polar (r, θ) , a cărei origine se află la distanța $\rho/2$ în spatele vârfului concentratorului (figura 6.2), pentru modul I relațiile care exprimă tensiunilor sunt:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} - \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \frac{\rho}{2r} \sin \frac{3\theta}{2} \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \text{pentru starea plană de tensiune} \quad (6.11a)$$

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y), \quad \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad \text{pentru starea plană de deformare} \quad (6.11b)$$

Așadar, câmpul tensiunilor la vârful creștăturii este similar cu cel al unei fisuri, al cărei vârf este situat în punctul O unde factorul de intensitate este K . Diferența față de câmpul tensiunilor la vârful fisurii, este reprezentată de un singur termen adițional ce depinde de raza de racordare ρ la vârful concentratorului, neglijabil când $\rho/r \ll 1$.

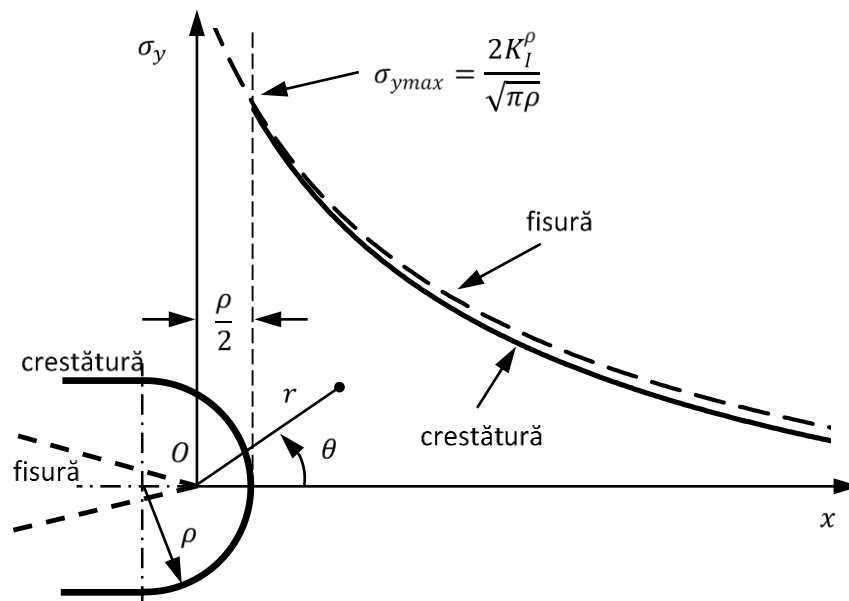


Figura 6.2. Variația tensiunii σ_y la vârful creștăturii după soluția Creager-Paris

De-a lungul bisectoarei, adică pentru $\theta = 0$, relațiile (6.11) se particularizează, astfel:

$$\sigma_x = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 - \frac{\rho}{2r}\right), \quad \sigma_y = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \left(1 + \frac{\rho}{2r}\right) \quad (6.12)$$

Tensiunea maximă $\sigma_{y\max}$ la vârful creștăturii se determină din (6.12), înlocuind $r = \rho/2$:

$$\sigma_{y \max} = \sigma_y(r = \rho/2) = \frac{K}{\sqrt{\pi\rho}} \quad (6.13)$$

Utilizând relația (6.13), Glinka (1985) a exprimat coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor K_t în funcție de factorul de intensitate a tensiunii K :

$$K_t = \frac{\sigma_{y \max}}{\sigma_n} = \frac{2K}{\sigma_n \sqrt{\pi\rho}} \quad (6.14)$$

Astfel, se poate determina pentru creștătura adâncă și subțire, cu raza la vârful mică, coeficientul de intensitate a tensiunii K_I^ρ :

$$K_I^\rho = \frac{K_t \sigma_n \sqrt{\pi\rho}}{2} \quad (6.15)$$

Singularitatea câmpului tensiunilor dispare în acest caz, iar la vârful concentratorului tensiunea maximă este finită, chiar dacă, la o distanță mică de vârf, distribuția tensiunii σ_y este similară cu cea de la vârful unei fisuri (figura 6.2). Se vorbește în acest caz despre o pseudo-singularitate în această zonă de la vârful creștăturii, determinată de K_I^ρ , cu o dependență $1/\sqrt{r}$, Pluvinage (2003).

Înlocuind K_I^ρ în relațiile (6.12), Glinka (1985) a obținut tensiunile normale de-a lungul bisectoarei:

$$\sigma_x = \frac{K_t \sigma_n}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad \sigma_y = \frac{K_t \sigma_n}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (6.16)$$

sau cu $r = x + \rho/2$:

$$\sigma_x = \frac{K_t \sigma_n}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{x}{\rho} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\rho} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right], \quad \sigma_y = \frac{K_t \sigma_n}{2\sqrt{2}} \left[\left(\frac{x}{\rho} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\rho} + \frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \quad (6.17)$$

Boukharouba ș.a. (1995) a introdus distanța critică X_c , al cărei ordin de mărime este dimensiunea grăunților, și a exprimat factorul de intensitate a tensiunii K_I^ρ în forma:

$$K_I^\rho = \sigma_y(X_c) \sqrt{\pi X_c} \frac{\left(2 + \frac{\rho}{X_c}\right)^{\frac{3}{2}}}{2 \left(1 + \frac{\rho}{X_c}\right)} \quad (6.18)$$

Relațiile (6.11) propuse de Creager-Paris pentru creștăturile adânci și subțiri, cu raza de racordare la vârful mică, cu o determinare precisă a coeficientului teoretic de concentrare a tensiunilor K_t , se utilizează cu o bună aproximație și pentru creștăturile laterale semicirculare sau creștăturile în formă de U.

6.3. Cazul concentratorilor de tensiune nesingulari (crestătură V rotunjită, crestătură U)

Metoda funcțiilor de variabilă complexă, Muskhelishvili (1953), și transformarea conformă pe un semiplan (u, v) auxiliary, Neuber (1958), au fost utilizate de Lazzarin și Tovo (1996), Atzori ș.a. (1997), Filippi ș.a. (2002) pentru determinarea distribuției tensiunilor în zona de la vârful unui concentrator de tip crestătură V (figura 6.3) pentru modul mixt de sollicitare I+II.

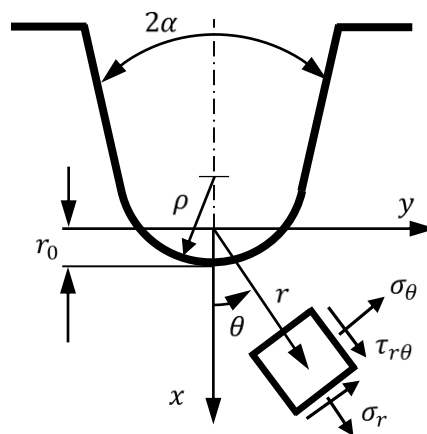


Figura 6.3. Geometria crestăturii, Filippi ș.a. (2002)

Deschiderea unghiulară 2α și raza la vârf ρ sunt asociate prin relațiile (6.19) și (6.20), unde coeficientul real q ia valori între 1 (cazul corpului fără crestătură) și 2 (cazul corpului cu fisură):

$$q = \frac{2\pi - 2\alpha}{\pi} \quad (6.19)$$

și

$$r_0 = \frac{(q - 1)\rho}{q} \quad (6.20)$$

Distanța r_0 determină originea sistemului de coordonate și se măsoară de la vârful crestăturii spre centrul de curbură de-a lungul bisectoarei deschiderii unghiulare 2α .

Componentele stării de tensiune sunt prezentate în continuare, separând contribuția celor două moduri de sollicitare, Filippi ș.a. (2002). Astfel, tensiunile corespunzătoare modului I de sollicitare sunt:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \lambda_1 r^{\lambda_1-1} a_1 \left[\begin{Bmatrix} (1+\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (3-\lambda_1)\cos(1-\lambda_1)\theta \\ (1-\lambda_1)\sin(1-\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{b_1}(1-\lambda_1) \begin{Bmatrix} \cos(1+\lambda_1)\theta \\ -\cos(1+\lambda_1)\theta \\ \sin(1+\lambda_1)\theta \end{Bmatrix} \right] \\
&+ \frac{q}{4(q-1)} \left(\frac{r}{r_0} \right) \left(\chi_{a_1} \begin{Bmatrix} (1+\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (3-\mu_1)\cos(1-\mu_1)\theta \\ (1-\mu_1)\sin(1-\mu_1)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{c_1} \begin{Bmatrix} \cos(1+\mu_1)\theta \\ -\cos(1+\mu_1)\theta \\ \sin(1+\mu_1)\theta \end{Bmatrix} \right) \quad (6.21)
\end{aligned}$$

De-a lungul bisectoarei creștăturii, tensiunea tangențială $\tau_{r\theta}$ este nulă, în modul I de solicitare.

Pentru modul II de solicitare tensiunile sunt date prin relațiile:

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} &= \lambda_2 r^{\lambda_2-1} a_2 \left[\begin{Bmatrix} (1+\lambda_2)\sin(1-\lambda_2)\theta \\ (3-\lambda_2)\sin(1-\lambda_2)\theta \\ (1-\lambda_2)\cos(1-\lambda_2)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{b_2}(1+\lambda_2) \begin{Bmatrix} \sin(1+\lambda_2)\theta \\ -\sin(1+\lambda_2)\theta \\ \cos(1+\lambda_2)\theta \end{Bmatrix} \right] \\
&+ \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\mu_2-\lambda_2} \left(\chi_{d_2} \begin{Bmatrix} (1+\mu_2)\sin(1-\mu_2)\theta \\ (3-\mu_2)\sin(1-\mu_2)\theta \\ (1-\mu_2)\cos(1-\mu_2)\theta \end{Bmatrix} + \chi_{c_2} \begin{Bmatrix} -\sin(1+\mu_2)\theta \\ \sin(1+\mu_2)\theta \\ -\cos(1+\mu_2)\theta \end{Bmatrix} \right) \quad (6.22)
\end{aligned}$$

De-a lungul bisectoarei creștăturii, tensiunile normale σ_r și σ_θ sunt nule, în modul II de solicitare. Parametrii reali λ_1 și λ_2 reprezintă primele valori proprii ale ecuațiilor (6.23) și (6.24), Williams (1957).

$$\sin(\lambda_1 q\pi) + \lambda_1 \sin(q\pi) = 0 \quad (\text{modul I de solicitare}) \quad (6.23)$$

$$\sin(\lambda_2 q\pi) - \lambda_2 \sin(q\pi) = 0 \quad (\text{modul II de solicitare}) \quad (6.24)$$

În ecuațiile (6.21) și (6.22) constantele a_1 și a_2 se determină la o distanță adecvată de vârful creștăturii, distanță la care câmpurile tensiunilor, pentru o creștătură ascuțită la vârf și, respectiv, pentru una rotunjită la vârf, sunt practic identice. Ceilalți parametri au toți soluțiile exacte prezentate în lucrarea lui Filippi ș.a. (2002). Expresiile (6.21) și (6.22) sunt valabile doar în zona de la vârful concentratorului, verificările numerice identificând valoarea tensiunii nominale nete ca limită inferioară rezonabilă.

Pentru creștătura V cu $\rho = 0$ și $2\alpha \neq 0$ soluția propusă de Filippi ș.a. (2002) este în concordanță cu soluția lui Williams (1952). Pe de altă parte, dacă creștătura V are $\rho \neq 0$ și $2\alpha = 0$, soluția coincide cu soluția Creager-Paris (1967) pentru concentratorul de tensiune parabolic subțire (îngust). Iar în cazul fisurii, creștătură V cu $\rho = 0$ și $2\alpha = 0$, evaluarea câmpului de tensiune conduce la rezultatele obținute de Irwin (1957) și Westergaard (1939).

O serie de analize numerice cu metoda elementului finit au demonstrat că acuratețea rezultatelor pentru modul I de solicitare depinde de o serie de factori, Filippi ș.a. (2002):

- distanța r de la vârful creștăturii (precizia rezultatelor crește cu reducerea distanței);
- deschiderea unghiulară 2α a creștăturii (acuratețea crește cu deschiderea unghiulară, profilul analitic al creștăturii fiind mai apropiat de cel real);
- raza ρ la vârf și adâncimea creștăturii (intervalul de validitate a soluției lui Filippi ș.a. (2002) se reduce cu majorarea razei la vârf și cu reducerea raportului adâncime/ligament;
- lățimea ligamentului (acuratețea crește cu majorarea ligamentului).

Pentru modul mixt de solicitare I+II, de-a lungul oricărei direcții diferite de bisectoarea creștăturii, câmpul tensiunilor se determină prin combinația dintre cele două moduri elementare I și II. Pentru direcția bisectoarei creștăturii, unde este posibilă separarea contribuției fiecărui mod elementar de solicitare, soluția propusă de Filippi ș.a (2002) îmbunătățește estimările pentru modul II de solicitare.

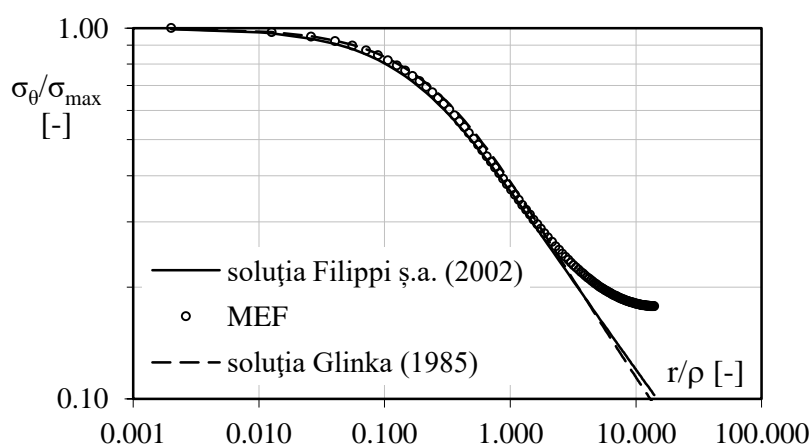


Figura 6.4. Distribuția tensiunilor pentru creștătura V rotunjită la vârf, Negru (2009)

Distribuțiile tensiunilor principale σ_θ de-a lungul bisectoarei, pentru cazul a două creștături V rotunjite la vârf (razele ρ egale cu 0,2 mm, respectiv 0,5 mm) solificate în modul I, prezintă pe domeniul $0,3\rho \div 1,2\rho$ o pantă constantă, figura 6.4. În consecință, pe acest domeniu intensitatea câmpului tensiunii se poate exprima prin factorul de intensitate a tensiunii pentru creștătură (*notch stress intensity factor NSIF*).

În cazul creștăturilor ascuțite la vârf, adică pentru $\rho = 0$, Gross și Mendelson (1972) au introdus factorii NSIF pentru modul I de solicitare K_I^V și pentru modul II de solicitare K_{II}^V :

$$K_I^V = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda_1} \sigma_\theta (r, \theta = 0) \quad (6.25)$$

$$K_{II}^V = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1-\lambda_2} \tau_{r\theta} (r, \theta = 0) \quad (6.26)$$

unde λ_1 și λ_2 sunt valorile proprii ale ecuațiilor (6.23) și (6.24), iar tensiunile σ_θ și $\tau_{r\theta}$ sunt evaluate de-a lungul bisectoarei. Extinderea definițiilor (6.25) și (6.26) la situația creștăturilor V rotunjite la vârf nu este întru totul justificată. După cum se observă și din figura 6.5, domeniul pe care NSIF are o valoare constantă depinde de geometria creștăturii, și anume, scade cu creșterea razei ρ . Mai mult, spre vârf creștăturii, când $r \rightarrow 0$ și valorile calculate ale NSIF scad spre zero, tensiunile fiind finite în această zonă.

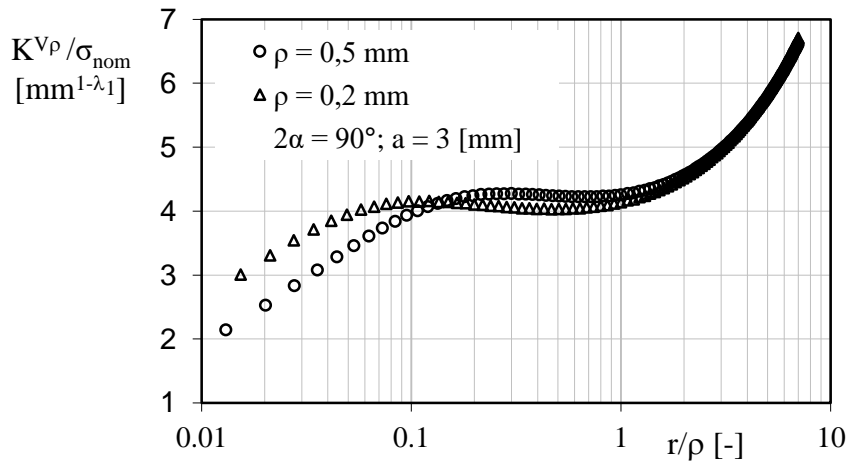


Figura 6.5. Variația NSIF de-a lungul bisectoarei creștăturii, Negru (2009)

Cu scopul de a depăși acest neajuns, Lazzarin și Filippi (2006) au introdus următoarele definiții ale NSIF pentru creștăturilor U sau V rotunjite la vârf:

$$K_I^{V\rho} = \sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_1} \frac{(\sigma_\theta)_{\theta=0}}{1 + \omega_1 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1-\lambda_1}} \quad (6.27)$$

$$K_{II}^{V\rho} = \sqrt{2\pi} r^{1-\lambda_2} \frac{(\tau_{r\theta})_{\theta=0}}{1 + \omega_2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2-\lambda_2}} \quad (6.28)$$

unde σ_θ și $\tau_{r\theta}$ sunt evaluate la distanța r (în sistemul de coordonate local, figura 6.3). Coeficienții ω_1 și ω_2 sunt cunoscuți prin relațiile:

$$\omega_1 = \frac{q}{4(q-1)} \left[\frac{\chi_{a_1}(1+\mu_1) + \chi_{c_1}}{1 + \lambda_1 + \chi_{b_1}(1-\lambda_1)} \right] \quad (6.29)$$

$$\omega_2 = \frac{1}{4(\mu_2-1)} \left[\frac{\chi_{a_2}(1-\mu_2) - \chi_{c_2}}{1 - \lambda_2 + \chi_{b_2}(1+\lambda_2)} \right] = -1 \quad (6.30)$$

Ceilalți parametri au toți soluțiile exacte prezentate în lucrarea lui Filippi ș.a. (2002).

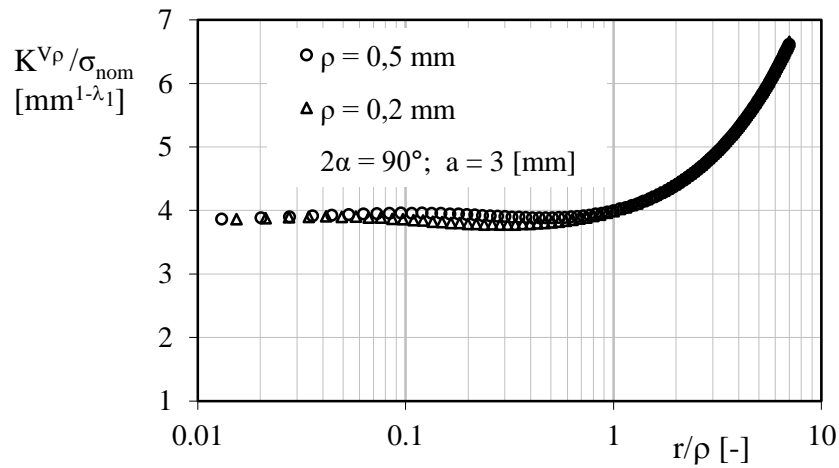


Figura 6.6. Variația NSIF de-a lungul bisectoarei creștăturii, Negru (2009)

Relațiile de definiție (6.27) și (6.28) atribuie o ușoară variație NSIF, după cum se observă în figura 6.6 pentru creștăturile analizate. Cu scopul de a elimina dependența de distanța măsurată de la vârful creștăturii, Lazzarin și Filippi (2006) au introdus valorile medii ale factorilor de intensitate a tensiunii pentru creștături:

$$\bar{K}_I^{V\rho} = \frac{1}{\eta\rho} \int_{r_0}^{r_0+\eta\rho} K_I^{V\rho} dr \quad (6.31)$$

$$\bar{K}_{II}^{V\rho} = \frac{1}{\eta\rho} \int_{r_0}^{r_0+\eta\rho} K_{II}^{V\rho} dr \quad (6.32)$$

unde coeficientul η depinde de intensitatea efectului de concentrare a tensiunilor.

Constantele a_1 și a_2 din expresiile tensiunilor (6.21) și (6.22) se determină pe baza factorilor de intensitate a tensiunii $K_I^{V\rho}$ și $K_{II}^{V\rho}$ cu relațiile:

$$a_1 = \frac{K_I^{V\rho}}{\lambda_1 \sqrt{2\pi} [1 + \lambda_1 + \chi_{b_1} (1 - \lambda_1)]} \quad (6.33)$$

$$a_2 = \frac{K_{II}^{V\rho}}{-\lambda_2 \sqrt{2\pi} [1 - \lambda_2 + \chi_{b_2} (1 - \lambda_2)]} \quad (6.34)$$

Cu referire la modul I de solicitare, definiția (6.27) păstrează pentru $K_I^{V\rho}$ unitatea de măsură a K_I^V , adică ($MPa \cdot m^{1-\lambda}$), unde $1 - \lambda$ este ordinul singularității.

Componentele stării de tensiune date de relațiile (6.21) și (6.22), utilizând (6.33) și (6.34), se prezintă în forma condensată, Gómez ș.a. (2007):

$$\begin{pmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix}^I = \frac{K_I^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_1}}} \left[\begin{pmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{pmatrix} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_1 - \lambda_1} \begin{pmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{pmatrix} \right] \quad (6.35)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{pmatrix}^{II} = \frac{K_{II}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi r^{1-\lambda_2}}} \left[\begin{pmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{pmatrix} + \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\mu_2 - \lambda_2} \begin{pmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{pmatrix} \right] \quad (6.36)$$

Funcțiile unghiulare se deduc cu ușurință pentru cele două moduri elementare I și II de solicitare, Gómez ș.a. (2007):

$$\begin{pmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{pmatrix}^I = \frac{1}{1 + \lambda_1 + \chi_{b_1} (1 - \lambda_1)} \left[\begin{pmatrix} (1 + \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (3 - \lambda_1) \cos(1 - \lambda_1) \theta \\ (1 - \lambda_1) \sin(1 - \lambda_1) \theta \end{pmatrix} + \chi_{b_1} (1 - \lambda_1) \begin{pmatrix} \cos(1 + \lambda_1) \theta \\ -\cos(1 + \lambda_1) \theta \\ \sin(1 + \lambda_1) \theta \end{pmatrix} \right] \quad (6.37)$$

$$\begin{pmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{pmatrix}^I = \frac{q}{4(q-1)[1 + \lambda_1 + \chi_{b_1} (1 - \lambda_1)]} \left[\chi_{a_1} \begin{pmatrix} (1 + \mu_1) \cos(1 - \mu_1) \theta \\ (3 - \mu_1) \cos(1 - \mu_1) \theta \\ (1 - \mu_1) \sin(1 - \mu_1) \theta \end{pmatrix} + \chi_{c_1} \begin{pmatrix} \cos(1 + \mu_1) \theta \\ -\cos(1 + \mu_1) \theta \\ \sin(1 + \mu_1) \theta \end{pmatrix} \right]$$

și

$$\begin{pmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{pmatrix}^{II} = \frac{1}{1 - \lambda_2 + \chi_{b_2} (1 + \lambda_2)} \left[\begin{pmatrix} (1 + \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (3 - \lambda_2) \sin(1 - \lambda_2) \theta \\ (1 - \lambda_2) \cos(1 - \lambda_2) \theta \end{pmatrix} + \chi_{b_2} (1 + \lambda_2) \begin{pmatrix} \sin(1 + \lambda_2) \theta \\ -\sin(1 + \lambda_2) \theta \\ \cos(1 + \lambda_2) \theta \end{pmatrix} \right] \quad (6.38)$$

$$\begin{pmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{pmatrix}^{II} = \frac{q}{4(\mu_2 - 1)[1 - \lambda_2 + \chi_{b_2} (1 + \lambda_2)]} \left[\chi_{a_2} \begin{pmatrix} (1 + \mu_2) \sin(1 - \mu_2) \theta \\ (3 - \mu_2) \sin(1 - \mu_2) \theta \\ (1 - \mu_2) \cos(1 - \mu_2) \theta \end{pmatrix} + \chi_{c_2} \begin{pmatrix} -\sin(1 + \mu_2) \theta \\ \sin(1 + \mu_2) \theta \\ -\cos(1 + \mu_2) \theta \end{pmatrix} \right]$$

În starea plană de deformație funcțiile unghiulare îndeplinesc și relațiile:

$$f_z = \nu(f_\theta + f_r) ; \quad g_z = \nu(g_\theta + g_r) \quad (6.39)$$

Bibliografie

Atzori B., Lazzarin P., Tovo R. (1997) Stress distributions for V-shaped notches under tensile and bending loads, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 8, 1083-1092.

Barber J.R. (2002) *Elasticity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Boukharouba T., Tamine T., Niu L., Chehimi C., Pluvinage G. (1995) The use of notch stress intensity factor as a fatigue crack initiation parameter, *Engineering Fracture Mechanics* 52, 503-512.

Constantinescu D.M. (2003) *Dezvoltări și Aplicații în Mecanica Ruperii și Oboseală*, Editura Academiei Române, București, România.

Creager M., Paris P.C. (1967) Elastic field equations for blunt cracks with reference to stress corrosion cracking, *International Journal of Fracture Mechanics* 3, 247-252.

Filippi S., Lazzarin P., Tovo R. (2002) Developments of some explicit formulas useful to describe elastic stress fields ahead of notches in plates, *International Journal of Solids and Structures* 39, 4543-4565.

Glinka G. (1985) Calculation of inelastic notch tip strain-stress histories under cyclic-loading, *Engineering Fracture Mechanics* 22, 839-854.

Gómez F.J., Elices M., Berto F., Lazzarin P. (2007) Local strain energy to assess the static failure of U-notches in plates under mixed mode loading, *International Journal of Fracture* 145, 29-45.

Gross R., Mendelson A. (1972) Plane elastostatic analysis of V-notched plates, *International Journal of Fracture Mechanics* 8, 267-276.

Hills D.A., Dini D., Magadu A., Korsunsky A.M. (2004) A review of asymptotic procedures in stress analysis: known solutions and their applications, *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 39, 553-568.

Irwin G.R. (1957) Analysis of stresses and strain near the end of a crack transversing a plate, *Journal of Applied Mechanics* 24, 361-364.

Lazzarin P., Tovo R. (1996) A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and nothes, *International Journal of Fracture* 78, 3-19.

Lazzarin P., Filippi S. (2006) A generalized stress intensity factor to be applied to rounded V-shaped notches, *International Journal of Solids and Structures* 43, 2461-2478.

Muskhelishvili N.I. (1953) *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*, Noordhoof; Leyden, The Netherlands.

Negru R.M. (2009) *Contribuții la studiul efectului de concentrare a tensiunilor cu aplicații în mecanica ruperii și oboseala materialelor*, Editura Politehnica, Timișoara (Teză de doctorat).

Neuber H. (1958) *Theory of Notch Stresses*, Springer-Verlag, Berlin.

Pluinage G. (2003) *Fracture and Fatigue Emanating from Stress Concentrators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Seweryn A., Molski K. (1996) Elastic stress singularities and corresponding generalized stress intensity factors for angular corner under various boundary conditions, *Engineering Fracture Mechanics* 55, 529-556.

Westergaard H.M. (1939) Bearing pressures and cracks, *Journal of Applied Mechanics* 6, A49-A53.

Williams M.L. (1952) Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in tension, *Journal of Applied Mechanics* 19, 526-528.

7. Abordări ingineresti de evaluare a integrității structurale

7.1. Teoria Distanțelor Critice (TCD)

7.1.1. Scurt istoric al TCD

Metoda Distanțelor Critice (Theory of Critical Distances) reprezintă un grup de metode care au o abordare comună, și anume, utilizează doi parametri de material: o lungime caracteristică L și o tensiune critică σ_0 . Din acest grup de metode, pornind de la *metoda punctului (Point Method)*, mai fac parte *metoda liniei (Line Method)*, *metoda ariei (Area Method)* și *metoda volumului (Volume Method)*, așa cum sunt prezentate de Taylor (2007). TCD este aplicată în investigarea cedării prin rupere fragilă și prin oboseală în domeniul durabilităților mari în prezența concentratorilor de tensiune.

Independent unul de celălalt, Neuber (1958), în Germania, și Peterson (1959), în SUA, au introdus primele formulări pentru metoda liniei, respectiv, pentru metoda punctului. Astfel, inițial, cu scopul de a determina câmpul tensiunilor elastice de la vârful creștăturilor, iar, mai târziu, în estimarea cedării prin oboseală, Neuber a calculat tensiunea medie pe o anumită distanță critică pornind de la vârful creștăturii și a propus următoarea relație pentru *coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor la solicitări variabile* K_f :

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \sqrt{\frac{\rho^*}{\rho}}} \quad (7.1)$$

unde K_t este coeficientul teoretic de concentrare a tensiunilor, ρ este raza de la vârful creștăturii și ρ^* este parametrul de material reprezentând distanța critică. În schimb, utilizând tensiunea calculată într-un anumit punct la o distanță critică de la vârful concentratorului, Peterson a propus o soluție diferită:

$$K_f = 1 + \frac{K_t - 1}{1 + \frac{\rho^{**}}{\rho}} \quad (7.2)$$

unde ρ^{**} este parametrul de material ales de Peterson, cu semnificația de distanță critică.

Principalele neajunsuri ale acestor formulări au fost legate de stabilirea valorilor distanțelor critice utilizate și de cunoașterea exactă a distribuției tensiunilor la vârful concentratorilor, pentru estimarea K_t . Cei doi cercetători au recurs în final la o

determinare empirică a parametrului de material, prin ajustarea predicțiilor cu datele experimentale.

Un deceniu mai târziu, metoda punctului și metoda liniei au fost propuse de McClintock și Irwin (1965), respectiv Novozhilov (1969) pentru studiul cedării prin rupere fragilă.

Un pas important în dezvoltarea TCD este reprezentat de cercetările lui Whitney și Nuismer (1974), dedicate ruperii compozitelor laminate care conțin discontinuități geometrice străpunse. Lucrarea propune două criterii de rupere bazate pe calculul tensiunilor, similare cu metoda punctului și metoda liniei, care au fost verificate experimental pentru concentratorii de tip fisură și gaură circulară. Ambele abordări utilizează doi parametri de material: câte o lungime caracteristică și rezistența de rupere la tracțiune. Criteriile de rupere propuse de Whitney și Nuismer (1974) stabilesc legătura cu LEFM și exprimă distanța critică în funcție de factorul critic de intensitate a tensiunii K_c și rezistența la rupere σ_r determinată pe epruvete fără concentratori de tensiune, în forma:

$$K_c = \sigma_r \sqrt{2\pi d_0}, \text{ pentru metoda punctului} \quad (7.3a)$$

$$K_c = \sigma_r \sqrt{\frac{\pi a_0}{2}}, \text{ pentru metoda liniei.} \quad (7.3b)$$

De asemenea, cele două abordări stabilesc și raportul distanțelor critice $4d_0 = a_0$.

Investigând mecanismul de cedare în cazul unor polimeri epoxidici, Kinloch și Williams (1980) au utilizat o tensiune critică σ_c diferită de rezistența la rupere σ_r determinată experimental, un pas important în dezvoltarea TCD.

Pentru calculul la solicitări variabile în domeniul durabilităților mari, Tanaka (1983) a propus, după aproape un deceniu, relația de determinare a distanței caracteristice:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta \sigma_0} \right) \quad (7.4)$$

unde ΔK_{th} reprezintă valoarea de prag a variației factorului de intensitate a tensiunii, iar $\Delta \sigma_0$ limita de oboseală determinată pe epruvete standard.

Mai târziu, soluția a fost redescoperită și validată experimental, Lazzarin ș.a. (1997), Taylor (1999), dovedindu-și utilitatea în estimarea durabilității componentelor cu concentratori de tensiune.

Aplicarea TCD la evaluarea integrității structurale implică cunoașterea distribuției tensiunilor elastice la vârful concentratorului, obținută cu ușurință în cazul

unor geometrii complexe din analiza numerică cu elemente finite, și a doi parametri de material: lungimea caracteristică L și tensiunea critică σ_0 , denumită și rezistența intrinsecă a materialului, Susmel și Taylor (2008a).

7.1.2. Metodele TCD

Metoda punctului (MP) este prezentată considerând cazul epruvetei din figura 7.1, sollicitată la întindere monoaxială. Distribuția tensiunilor de la vârful concentratorului se obține dintr-o analiză liniar-elastică cu elemente finite.

Metoda punctului enunță criteriul de cedare astfel: *ruperea fragilă* se produce atunci când tensiunea la o distanță critică $L/2$, măsurată de la baza concentratorului pornind din punctul de tensiune maximă (*hot spot*) de-a lungul direcției critice (*focus path*), egalează tensiunea critică σ_0 a materialului, Taylor (2007).

Dacă se notează cu r distanța de la vârful concentratorului, metoda punctului se formulează matematic astfel:

$$\sigma_{\theta} \left(r = \frac{L}{2}; \theta = 0 \right) = \sigma_1 \left(r = \frac{L}{2}; \theta = 0 \right) = \sigma_0 \quad (7.5)$$

Pentru epruveta din figura 7.1, alegerea este evidentă: punctul de tensiune maximă este plasat chiar la vârful creștăturii, iar direcția de evaluare a tensiunii este normală la direcția de sollicitare. Tensiunea normală σ_{θ} este tensiunea normală principală maximă σ_1 , iar direcția pe care se măsoară distanța critică $L/2$ este perpendiculară pe direcția tensiunii principale maxime.

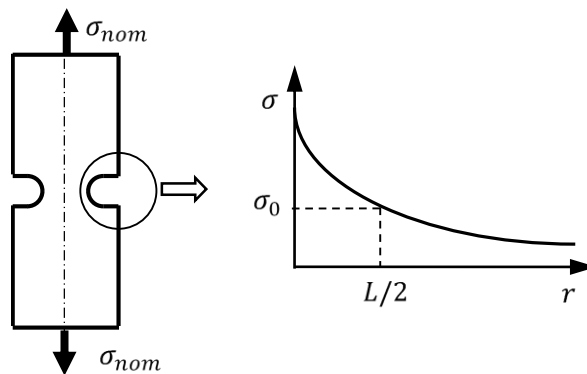


Figura 7.1. Estimarea ruperii fragile cu Metoda Punctului, Taylor (2007)

Așadar, problema se reduce la determinarea tensiunii nominale aplicate σ_f pentru care se produce ruperea fragilă. Pentru a estima această tensiune, MP utilizează

distribuția tensiunilor elastice la vârful concentratorului, fie obținută cu o soluție analitică, fie cu o analiză numerică. MP se aplică cu ușurință deoarece, analiza fiind una linear-elastică, în fiecare punct tensiunile sunt direct proporționale cu tensiunea nominală aplicată, rezolvarea problemei implicând doar simpla scalare a curbei tensiune-distanță.

Pentru situațiile complexe, din punctul caracterizat de valoarea maximă a tensiunii principale σ_1 , evaluarea tensiunii se face de-a lungul normalei la suprafața creștăturii, direcție perpendiculară pe tensiunea principală maximă.

Taylor (1999) a obținut expresia pentru lungimea caracteristică L realizând legătura teoretică cu mecanica ruperii liniar-elastice. Dacă TCD este valabilă pentru oricare tip de concentrator de tensiune, atunci TCD este aplicabilă și fisurilor. Iar, în zona de la vârful fisurii, distribuția tensiunii circumferențiale σ_θ este dată de relația, Westergaard (1939):

$$\sigma_\theta(r, \theta = 0) = \frac{\sigma_{nom}}{\left[1 - \left(\frac{a}{a+r}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \cong \sigma_{nom} \sqrt{\frac{a}{2r}} \quad (7.6)$$

Relația (7.6) este valabilă pentru $r \ll a$, cu alte cuvinte lungimea fisurii a este mult mai mare decât lungimea caracteristică L . Dacă se notează cu σ_f tensiunea nominală aplicată la ruperea fragilă a corpului cu fisură, din relațiile (7.5) și (7.6) se obține:

$$\sigma_0 = \sigma_f \sqrt{\frac{a}{L}} \quad (7.7)$$

Dacă se introduce expresia factorului de intensitate a tensiunii K :

$$K = \sigma_{nom} \sqrt{\pi a} \quad (7.8)$$

atunci, în momentul cedării prin rupere fragilă a corpului cu fisură, din perspectiva mecanicii ruperii liniar-elastice, se obține:

$$K_c = \sigma_f \sqrt{\pi a} \quad (7.9)$$

Dacă se elimină σ_f între ecuațiile (7.7) și (7.9) rezultă expresia propusă de Taylor (1999) pentru calculul lungimii caracteristice L :

$$L = \frac{1}{\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_0} \right)^2 \quad (7.10)$$

unde s-a introdus tenacitatea materialului K_{Ic} , determinată în condiții standard.

Valoarea tensiunii critice σ_0 se stabilește în funcție de tipul materialului. Pentru materialele fragile (materiale ceramice, compozite armate cu fibre etc.) care prezintă un

comportament liniar-elastic până la ruperea finală, tensiunea critică σ_0 este egală cu rezistența de rupere la tracțiune monoaxială σ_r determinată pe epruvete standardizate. În acest caz, lungimea caracteristică se calculează cu relația (7.10).

Dacă ruperea finală este precedată de o deformație plastică limitată (polimeri, încercări ale metalelor la temperaturi joase), tensiunea critică σ_0 este mai mare decât σ_r . Pentru astfel de condiții, tensiunea critică σ_0 se determină prin testarea unor epruvete care prezintă concentratori de tensiune diferiți, distribuțiile tensiunilor la vârful concentratorilor fiind caracterizate de valori maxime și variații diferite, Taylor (2007), Susmel și Taylor (2008a).

Această modalitate de determinare a parametrilor de material este ilustrată în figura 7.2: L și σ_0 sunt coordonatele punctului de intersecție a celor două curbe care reprezintă distribuțiile tensiunilor elastice în funcție de distanța de la vârful creștăturii, în condițiile de inițiere a rupei, adică tensiunea nominală este egală cu σ_f .

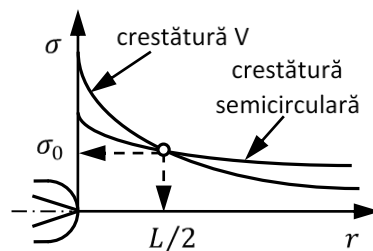


Figura 7.2. Determinarea parametrilor L și σ_0 la cedarea prin rupere fragilă, Taylor (2007)

Pentru celelalte trei metode (figura 7.3) parametrul utilizat nu este tensiunea într-un anumit punct, ci valoarea medie a acesteia stabilită pentru o anumită regiune a câmpului de tensiune. Astfel, în **metoda liniei** (ML) valoarea medie se calculează pe o distanță critică egală cu $2L$, pornind de la vârful concentratorului (unde $r = 0$):

$$\frac{1}{2L} \int_0^{2L} \sigma(r) dr = \sigma_0 \quad (7.11)$$

Metoda ariei (MA) și **metoda volumului** (MV) presupune medierea tensiunilor pe o anumită suprafață din vecinătatea concentratorului, respectiv pe un anumit volum. În mod evident, rezultatele vor depinde de forma suprafeței, respectiv de forma volumului. În cazul unui concentrator ascuțit, pentru o suprafață de formă semicirculară cu centrul în punctul de tensiune maximă, Bellet ș.a. (2005) au demonstrat că raza critică este egală cu $1,32L$ (figura 7.3). Similar, pentru un volum de formă semisferică Bellet ș.a. (2005) au obținut o rază critică de $1,54L$. Ultimele două metode sunt relativ dificil

de utilizat, necesitând efectuarea unor integrale de suprafață sau de volum, fără să aducă o îmbunătățire semnificativă a preciziei estimărilor.

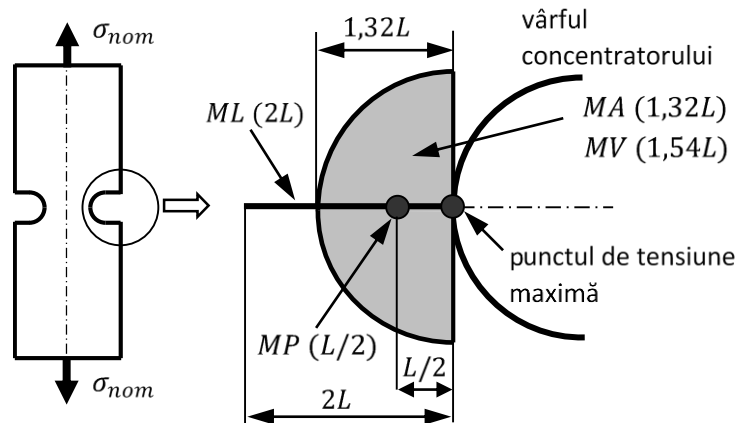


Figura 7.3. Metodele TCD, Taylor (2007)

TCD a fost aplicată cu succes la predicția cedării prin rupere fragilă a componentelor din materiale ceramice, Taylor (2004), din materiale compozite sau polimeri, PMMA - Susmel și Taylor (2008b), materiale poliuretanică – Negru (2009), Negru ș.a. (2013, 2015a, 2015b).

7.1.3. Aplicarea TCD la evaluarea rezistenței la oboseală

TCD este capabilă de a estima limita de oboseală a componentelor cu concentratori de tensiune. Conform MP criteriul de cedare la oboseală în domeniul durabilităților mari se formulează astfel:

$$\Delta\sigma_{\theta} \left(r = \frac{L}{2}; \theta = 0 \right) = \Delta\sigma_1 \left(r = \frac{L}{2}; \theta = 0 \right) = \Delta\sigma_0 \quad (7.12)$$

unde $\Delta\sigma_0$ reprezintă limita de oboseală determinată pe epruvete standard. Cu alte cuvinte, o componentă cu un concentrator de tensiune atinge condițiile limită ale rezistenței sale la oboseală atunci când variația tensiunii de deschidere a fisurii (sau variația tensiunii principale) $\Delta\sigma_{\theta}$ atinge $\Delta\sigma_0$ la o distanță egală cu $L/2$ măsurată de la vârful concentratorului de tensiune.

Lungimea caracteristică L se determină cu relația următoare:

$$L = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\Delta K_{th}}{\Delta\sigma_0} \right)^2 \quad (7.13)$$

unde ΔK_{th} și $\Delta\sigma_0$ se determină pentru același coeficient de asimetrie R al ciclului de solicitare.

O strategie alternativă pentru stabilirea lungimii caracteristice L , fără determinarea experimentală a valorii de prag ΔK_{th} a variației factorului de intensitate a tensiunii, a fost propusă de Susmel și Taylor (2010). Aplicarea acesteia presupune cunoașterea curbelor de durabilitate S-N pentru două tipuri de epruvete: epruvete standard (fără concentratori de tensiune) și, respectiv, epruvete cu un concentrator de o geometrie cunoscută.

Astfel, utilizând o analiză cu elemente finite, se obține câmpul tensiunilor elastice $\Delta\sigma_\theta$ în zona de la vârful creștăturii. În figura 7.4 este reprezentată distribuția tensiunilor $\Delta\sigma_\theta$ în funcție de distanța r măsurată de la vârful creștăturii, de-a lungul perpendicularei pe direcția tensiunilor principale maxime, pentru o variație a tensiunii aplicate egală cu limita de oboseală $\Delta\sigma_{0n}$ a epruvetelor cu concentratori de tensiune. Punctul în care orizontala corespunzătoare limitei de oboseală $\Delta\sigma_0$ intersectează curba variația tensiunii-distanță determină distanța critică $L/2$, conform metodei punctului.

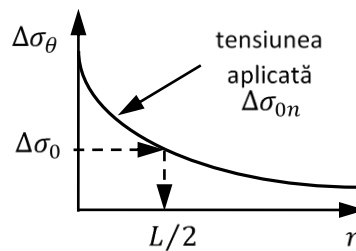


Figura 7.4. Determinarea lungimii caracteristice L la oboseală în domeniul durabilităților mari, Susmel și Taylor (2010)

Metodologia de lucru prezentată se constituie și într-o alternativă pentru determinarea caracteristicilor de material, și anume, tenacitatea la rupere K_c , respectiv valoarea de prag a variației factorului de intensitate a tensiunii ΔK_{th} , Susmel și Taylor (2010).

Considerând domeniul durabilităților medii, între 50000 și 10^6 cicluri, Susmel și Taylor (2007) au introdus lungimea caracteristică L ca o funcție de numărul de cicluri N_f până la cedare:

$$L(N_f) = A \cdot N_f^B \quad (7.14)$$

unde $A > 0$ și $B < 0$ sunt constante care depind de coeficientul de asimetrie R al ciclului de solicitare.

7.1.4. Reformularea TCD la solicitările în moduri mixte

Analizând ruperea fragilă a epruvetelor cilindrice confecționate din PMMA și solicitate în modul mixt I+III, în prezența concentratorilor de tipul creștătură circumferențială, Susmel și Taylor (2008b) au reformulat TCD. Justificate de modificarea mecanismului de rupere cu gradul de multiaxialitate, ipotezele care au constituit pentru Susmel și Taylor (2008b) punctul de plecare în reformularea metodei distanțelor critice sunt:

a). tensiunea critică σ_0 nu depinde de multiaxialitatea câmpului tensiunilor de la vârful creștăturii, astfel încât, la evaluarea ruperii componentelor cu concentratori de tensiune solicitate în moduri mixte, se poate utiliza valoarea tensiunii critice σ_0 determinată pentru modul I;

b). lungimea caracteristică L se modifică cu gradul de multiaxialitate al câmpului tensiunilor de la vârful concentratorului; pentru o solicitare mixtă I+III Susmel și Taylor (2008b) au introdus raportul tensiunilor principale ca o măsură a gradului de multiaxialitate:

$$\beta(\varphi, r) = -\frac{\sigma_3(\varphi, r)}{\sigma_1(\varphi, r)} \quad (7.15)$$

Se observă din relația (7.15) că pentru o distanță r , măsurată de la vârful creștăturii, coeficientul β depinde de orientarea φ a planului considerat, iar pentru o orientare φ dată, acesta se modifică cu distanța r .

c). cedarea este cauzată de propagarea fisurilor inițiate în planul critic definit de unghiul φ^* , acest plan fiind caracterizat de tensiunile normale σ_φ maxime.

În acest plan critic de orientare φ^* , Susmel și Taylor (2008b) au considerat că un comportament liniar-elastic se transpune în dependența liniară dintre lungimea critică și coeficientul de multiaxialitate:

$$L[\beta(\varphi^*, r)] = A\beta(\varphi^*, r) + B \quad (7.16)$$

Constantele de material A și B se calculează prin particularizare, în cazurile limită: $\beta = 0$ pentru modul I de solicitare și $\beta = 1$ în modul III.

Aplicarea practică a metodei punctului este ilustrată grafic în figura 7.5, Susmel și Taylor (2008b). Astfel, se localizează punctul potențial de inițiere a fisurii pe suprafața epruvetei și se calculează coeficientul de multiaxialitate β , respectiv lungimea

caracteristică $L(\beta)$, de-a lungul direcțiilor care pornesc din acest punct, în funcție de distanța r și unghiul φ . Distanța critică $L/2$ este soluția ecuației:

$$\frac{L[\beta(\varphi^*, r)]}{2} - r = 0 \Rightarrow \frac{A \cdot \beta(\varphi^*, r) + B}{2} - r = 0 \quad (7.17)$$

unde φ^* este direcția caracterizată, la distanța determinată din (7.17), de tensiunea normală maximă σ_φ . Cedarea prin rupere fragilă se produce când tensiunea $\sigma_{\varphi^*}(L/2)$ atinge valoarea critică σ_0

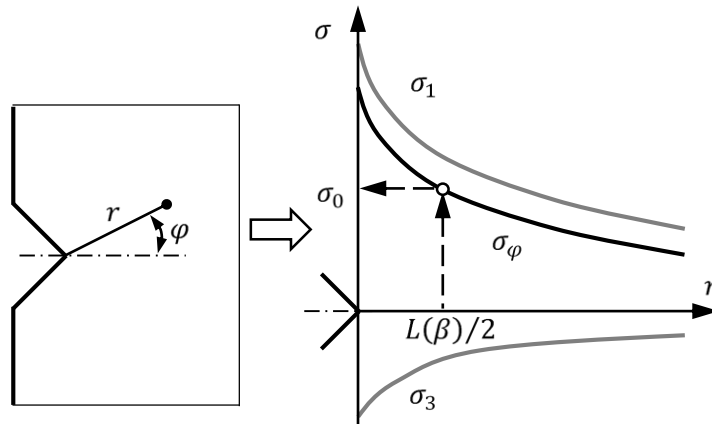


Figura 7.5. Aplicarea MP pentru o solicitare în modul mixt I+III, Susmel și Taylor (2008b)

Recent, Negru ș.a. (2015a) au propus, pentru modul mixt de solicitare I+II, o relație similară de calcul a lungimii caracteristice:

$$L(M^e) = A \cdot M^e + B \quad (7.18)$$

Parametrul M^e ține cont de combinația dintre modul I și modul II, Ayatollahi și Torabi (2009):

$$M^e = \frac{2}{\pi} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \right) \quad (7.19)$$

Constantele A și B se determină pentru două configurații limită: modul I ($M^e = 1$) și modul II ($M^e = 0$).

7.2. Criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație

Criteriul valorii medii a energiei elastice specifice de deformația \bar{W} (*averaged strain energy density method ASED*) a fost propus de Lazzarin și Zambardi (2001) pentru evaluarea cedării prin rupere fragilă și la solicitări variabile, în domeniul durabilităților mari, a componentelor structurale cu creștături V ascuțite (concentratori singulari). Valoarea medie \bar{W} se determină pe un volum finit cu raza R_c , respectiv o suprafață finită, în aplicațiile plane.

Criteriul enunță că ruperea fragilă se produce atunci când valoarea medie \bar{W} atinge valoarea critică W_c :

$$\bar{W} \leq W_c \quad (7.20)$$

inegalitatea reprezentând condiția care asigură integritatea componentelor structurale. Pentru materialele fragile, valoarea critică W_c se determină cu relația:

$$W_c = \frac{\sigma_c^2}{2E} \quad (7.21)$$

unde tensiunea critică σ_c este egală cu rezistența de rupere σ_r la întindere monoaxială, iar E reprezintă modulul de elasticitate longitudinală.

Criteriul a fost extins de Lazzarin și Berto (2005a) la ruperea fragilă în modul I de solicitare a componentelor structurale cu concentratori de tensiune nesingulari de tipul creștătură U și creștătură V rotunjită la vârf.

La concentratorii de tensiune nesingulari de tipul creștătură, Gómez ș.a. (2007) au aplicat criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație la evaluarea cedării componentelor structurale solicitate în modul mixt I+II.

Lucrările publicate de Gómez ș.a. (2008) și Lazzarin ș.a. (2010) au stabilit relațiile de legătură dintre valoarea medie \bar{W} a energiei specifice de deformație și factorii de intensitate a tensiunii pentru concentratorii de tip creștătura. Pentru modul I de solicitare, Barati ș.a. (2011) au stabilit legătura între valoarea medie \bar{W} și integrala J , în cazul creștăturilor U.

7.2.1. Expresia energiei de deformație pentru creștătura V ascuțită

Pentru creștătura V ascuțită, de deschidere unghiulară 2α și raza la vârf $\rho = 0$, figura 7.6, originea sistemului de coordonate este plasată în vârful creștăturii, cu alte cuvinte $r_0 = 0$. În consecință, relațiile (6.35) și (6.36) se simplifică corespunzător, iar câmpul tensiunilor se obține prin suprapunerea efectelor:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^I + \begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^{II} = \frac{K_I^{V\rho}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_1}} \begin{Bmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix}^I + \frac{K_{II}^{V\rho}}{\sqrt{2\pi}r^{1-\lambda_2}} \begin{Bmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix}^{II} \quad (7.22)$$

Energia specifică de deformație pentru un material izotrop, cu un comportament liniar-elastic, se exprimă astfel:

$$W(r, \theta) = \frac{1}{2E} [(\sigma_\theta^2 + \sigma_r^2 + \sigma_z^2) - 2\nu(\sigma_\theta\sigma_r + \sigma_\theta\sigma_z + \sigma_r\sigma_z) + 2(1 + \nu)\tau_{r\theta}^2] \quad (7.23)$$

Înlocuind expresiile tensiunilor (7.22) în relația (7.23), se obține energia specifică de deformație:

$$W(r, \theta) = W_1(r, \theta) + W_2(r, \theta) + W_{12}(r, \theta) \quad (7.24)$$

Lazzarin și Zambardi (2001) au exprimat componentele energiei, astfel:

$$W_1(r, \theta) = \frac{r^{2(\lambda_1-1)}(K_I^V)^2}{2E} [(f_\theta^2 + f_r^2 + f_z^2)^I - 2\nu(f_\theta f_r + f_\theta f_z + f_r f_z)^I + 2(1 + \nu)(f_{r\theta}^2)^I] \quad (7.25)$$

$$W_2(r, \theta) = \frac{r^{2(\lambda_2-1)}(K_{II}^V)^2}{2E} [(f_\theta^2 + f_r^2 + f_z^2)^{II} - 2\nu(f_\theta f_r + f_\theta f_z + f_r f_z)^{II} + 2(1 + \nu)(f_{r\theta}^2)^{II}] \quad (7.26)$$

$$W_{12}(r, \theta) = \frac{r^{(\lambda_1+\lambda_2-1)}K_I^V K_{II}^V}{E} [(f_\theta^I f_\theta^{II} + f_r^I f_r^{II} + f_z^I f_z^{II}) - \nu(f_\theta^I f_r^{II} + f_\theta^I f_z^{II} + f_r^I f_\theta^{II} + f_r^I f_z^{II} + f_z^I f_\theta^{II} + f_z^I f_r^{II}) + 2(1 + \nu)f_{r\theta}^I f_{r\theta}^{II}] \quad (7.27)$$

Deoarece domeniul de integrare este simetric în raport cu bisectoarea creștăturii V, contribuția termenului W_{12} este egală cu zero. Energia totală de deformație, determinată pe suprafața de rază R din figura 7.6, se determină prin integrare:

$$E(R) = E_1 + E_2 = \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} W(r, \theta) r dr d\theta = \frac{R^{2\lambda_1} I_1(\gamma)}{E} \frac{1}{4\lambda_1} (K_I^V)^2 + \frac{R^{2\lambda_2} I_2(\gamma)}{E} \frac{1}{4\lambda_2} (K_{II}^V)^2 \quad (7.28)$$

unde $\gamma = \pi - \alpha$, iar integralele $I_1(\gamma)$ și $I_2(\gamma)$ sunt date de expresiile:

$$I_I = \int_{-\gamma}^{+\gamma} [(f_\theta^2 + f_r^2 + f_z^2)^I - 2\nu(f_\theta f_r + f_\theta f_z + f_r f_z)^I + 2(1 + \nu)(f_{r\theta}^I)^2] d\theta \quad (7.29)$$

$$I_{II} = \int_{-\gamma}^{+\gamma} [(f_\theta^2 + f_r^2 + f_z^2)^{II} - 2\nu(f_\theta f_r + f_\theta f_z + f_r f_z)^{II} + 2(1 + \nu)(f_{r\theta}^{II})^2] d\theta \quad (7.30)$$

În condițiile stării plane de deformare, tensiunea normală σ_z este:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_\theta + \sigma_r) \quad (7.31)$$

și $\sigma_z = 0$ pentru starea plană de tensiune.

Lazzarin și Zambardi (2001) au obținut o soluție analitică pentru integralele I_1 și I_2 în condițiile stării plane de tensiune. O soluție numerică, prezentată tabelar în funcție de deschiderea unghiulară 2α , a fost publicată și pentru starea plane de deformare.

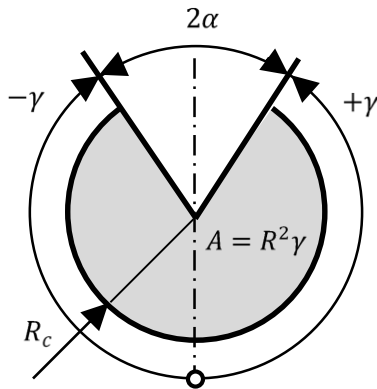


Figura 7.6. Suprafața de control pentru creștătura V ascuțită, Lazzarin și Zambardi (2001)

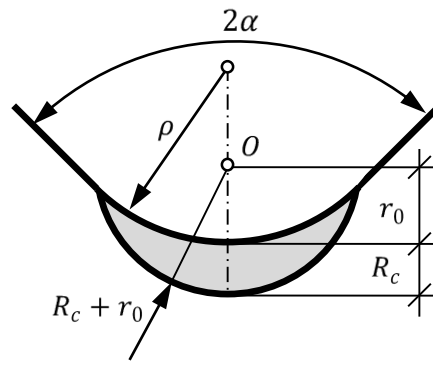


Figura 7.7. Suprafața de control pentru creștătura V rotunjită, Gómez ș.a. (2007)

Dacă aria sectorului circular pe care se efectuează integrarea este:

$$A = \int_0^R \int_{-\gamma}^{+\gamma} r dr d\theta = R^2 \gamma \quad (7.32)$$

energia medie specifică de deformare \bar{W} se determină prin împărțirea energiei $E(R)$ dată de relația (7.28) la aria A :

$$\bar{W} = \frac{E(R)}{A(R)} = \frac{I_1(\gamma)}{4E\lambda_1\gamma} \left(\frac{K_I^V}{R^{1-\lambda_1}} \right)^2 + \frac{I_2(\gamma)}{4E\lambda_2\gamma} \left(\frac{K_{II}^V}{R^{1-\lambda_2}} \right)^2 \quad (7.33)$$

$$\bar{W} = \frac{e_1}{E} \left(\frac{K_I^V}{R^{1-\lambda_1}} \right)^2 + \frac{e_2}{E} \left(\frac{K_{II}^V}{R^{1-\lambda_2}} \right)^2 \quad (7.34)$$

unde e_1 și e_2 sunt:

$$e_1(2\alpha) = \frac{I_1(\gamma)}{4\lambda_1\gamma} ; \quad e_2(2\alpha) = \frac{I_2(\gamma)}{4\lambda_2\gamma} \quad (7.35)$$

Prin simplificare, dacă se reduce problema la modul I de solicitare și la o creștătură V cu deschiderea unghiulară $2\alpha = 0$ (fisură), din ecuația (7.33) se determină raza critică R_c :

$$R_c = \left[\frac{I_1(\gamma)K_{Ic}^2}{4\lambda_1\gamma EW_c} \right]^{\frac{1}{2(1-\lambda_1)}} \quad (7.36)$$

înlocuind $\bar{W} = W_c$ și $K_I^V = K_{Ic}$.

O altă relație de calcul a razei critice R_c a fost stabilită de Yosibash ș.a. (2004):

$$R_c = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (7.37)$$

pentru starea plană de deformație. Lazzarin și Berto (2005a) au propus o variantă de calcul a razei critice R_c pentru starea plană de tensiune:

$$R_c = \frac{(5-3\nu)}{4\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} \right)^2 \quad (7.38)$$

7.2.2. Expresia energiei de deformație pentru creștătura V rotunjită (modul I)

În modul I de solicitare, pentru creștătura V rotunjită la vârf (figura 7.7), constanta a_1 din expresiile tensiunilor (6.21) se determină în funcție de tensiunea maximă de la vârful creștăturii, Lazzarin și Tovo (1996):

$$a_1 = \frac{\sigma_{max} r_0^{1-\lambda_1}}{1 + \omega_1} \quad (7.39)$$

unde coeficientul ω_1 este definit prin (6.29). Starea de tensiune dată de relațiile (6.35) devine:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\theta \\ \sigma_r \\ \tau_{r\theta} \end{Bmatrix}^I = \frac{\sigma_{max}}{1 + \omega_1} \left(\frac{r_0}{r} \right)^{1-\lambda_1} \left[\begin{Bmatrix} f_\theta \\ f_r \\ f_{r\theta} \end{Bmatrix} + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\mu_1-\lambda_1} \begin{Bmatrix} g_\theta \\ g_r \\ g_{r\theta} \end{Bmatrix} \right]^I \quad (7.40)$$

cu funcțiile unghiulare f_i și g_i cunoscute, relațiile (6.37). În condițiile menționate, Lazzarin și Berto (2005b) au determinat energia de deformație astfel:

$$W_1(r, \theta) = \frac{1}{2E} \left(\frac{\sigma_{max}}{1 + \omega_1} \right)^2 \left[\left(\frac{r}{r_0} \right)^{2(\lambda_1-1)} F_\lambda + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{2(\mu_1-1)} G_\mu + \left(\frac{r}{r_0} \right)^{\lambda_1+\mu_1-2} M_{\lambda\mu} \right] \quad (7.41)$$

unde funcțiile unghiulare F_λ , G_μ și $M_{\lambda\mu}$ au expresiile următoare:

$$F_\lambda = [(f_\theta^2 + f_r^2 + f_z^2) - 2\nu(f_\theta f_r + f_\theta f_z + f_r f_z) + 2(1 + \nu)f_{r\theta}^2]^I \quad (7.42)$$

$$G_\mu = [(g_\theta^2 + g_r^2 + g_z^2) - 2\nu(g_\theta g_r + g_\theta g_z + g_r g_z) + 2(1 + \nu)g_{r\theta}^2]^I \quad (7.43)$$

$$M_{\lambda\mu} = [(f_\theta g_\theta + f_r g_r + f_z g_z) - \nu(f_\theta g_r + g_\theta f_r + f_\theta g_z + g_\theta f_z + f_r g_z + g_r f_z) + 2(1 + \nu)f_{r\theta} g_{r\theta}] \quad (7.44)$$

Pentru calculul energiei de deformație, Lazzarin și Berto (2005b) au utilizat o suprafață de control în formă de semilună, figura 7.7, prin integrare obținându-se:

$$E_1 = \int_A W_1 dA = \int_{-\theta}^{+\theta} \int_{R_1}^{R_2} W_1(r, \theta) r dr d\theta = \frac{1}{2E} \left(\frac{\sqrt{2\pi} \sigma_{max}}{1 + \omega_1} \right)^2 r_0^{2(1-\lambda_1)} I_1 \quad (7.45)$$

Limitele de integrare $\pm\theta$ reprezintă, în sistemul de coordonate polar, unghiurile măsurate de la bisectoarea creștăturii la punctele de intersecție dintre suprafața de control cu flancurile creștăturii. În ecuația (7.45), integrala I_1 reprezintă:

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} (I_\lambda + I_\mu + I_{\lambda\mu}) \quad (7.46)$$

unde

$$I_\lambda = \int_{-\theta}^{+\theta} \frac{(R_2^{2\lambda_1} - R_1(\theta)^{2\lambda_1})}{2\lambda_1} F_\lambda d\theta \quad (7.47)$$

$$I_\mu = (r_0)^{2(\lambda_1 - \mu_1)} \int_{-\theta}^{+\theta} \frac{(R_2^{2\mu_1} - R_1(\theta)^{2\mu_1})}{2\mu_1} G_\mu d\theta \quad (7.48)$$

$$I_{\lambda\mu} = 2(r_0)^{\lambda_1 - \mu_1} \int_{-\theta}^{+\theta} \frac{(R_2^{\lambda_1 + \mu_1} - R_1(\theta)^{\lambda_1 + \mu_1})}{\lambda_1 + \mu_1} M_{\lambda\mu} d\theta \quad (7.49)$$

Pentru creștătura U, cu deschiderea unghiulară $2\alpha = 0$, integrala $I_{\lambda\mu}$ se anulează.

În final, se determină energie specifică de deformație medie \bar{W}_1 prin împărțirea energiei totale E_1 la aria suprafeței de control:

$$\bar{W}_1 = \frac{E_1}{A} = \frac{1}{E} \left(\frac{\sqrt{2\pi} \sigma_{max} r_0^{1-\lambda_1}}{1 + \omega_1} \right)^2 \cdot \frac{I_1}{A} \quad (7.50)$$

unde aria suprafeței de control este:

$$A = \int_{R_1(\theta)}^{R_2} \int_{-\theta}^{+\theta} r dr d\theta \quad (7.51)$$

Deoarece raportul I_1/A depinde de deschiderea unghiulară a creștăturii 2α , de raza la vârf ρ și de raza critică R_c , Lazzarin și Berto (2005b) au introdus funcțiile H și F :

$$\frac{I_1}{A}(2\alpha, \rho, R_c) = \frac{1}{\rho^{2(1-\lambda_1)}} H\left(2\alpha, \frac{R_c}{\rho}\right) \quad (7.52)$$

$$F(2\alpha) = \left(\frac{q-1}{q}\right)^{2(1-\lambda_1)} \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{1+\omega_1}\right)^2 \quad (7.53)$$

Astfel, energia specifică de deformație medie \bar{W}_1 exprimată prin (7.50), devine:

$$\bar{W}_1 = \frac{E_1}{A} = \frac{\sigma_{max}^2}{E} F(2\alpha) H\left(2\alpha, \frac{R_c}{\rho}\right) \quad (7.54)$$

Soluțiile numerice ale funcțiilor H și F sunt date tabelar, după valorile coeficientului lui Poisson ν . Dacă se utilizează factorul de intensitate a tensiunii pentru creștătură $K_I^{V\rho}$ în locul tensiunii maxime σ_{max} , energia specifică de deformație medie \bar{W}_1 se exprimă prin relația următoare, Berto și Lazzarin (2009):

$$\bar{W}_1 = \frac{E_1}{A} = \frac{(K_I^{V\rho})^2}{E} \frac{1}{\rho^{2(1-\lambda_1)}} H\left(2\alpha, \frac{R_c}{\rho}\right) \quad (7.55)$$

7.2.3. Expresia energiei de deformație pentru creștătura U (modul mixt)

Relațiile de calcul se particularizează, pentru creștătura U, ținând cont de simplificarea următoare:

$$2\alpha = 0, \quad q = 2, \quad r_0 = \frac{\rho}{2}, \quad \lambda_1 = 0,5, \quad \omega_1 = 1 \quad (7.56)$$

Energia specifică de deformație medie \bar{W}_1 exprimată prin (7.54) și (7.55) se simplifică, în cazul modului I de solicitare, după cum urmează, Gómez ș.a. (2007):

$$\bar{W}_1 = \frac{\pi\sigma_{max}^2}{4E} H\left(\frac{R_c}{\rho}\right) = \frac{(K_I^{V\rho})^2}{\rho E} H\left(\frac{R_c}{\rho}\right) \quad (7.57)$$

În modul mixt I+II de solicitare, tensiunea principală maximă σ_{max} se produce în afara bisectoarei creștăturii, în punctul P, a cărui poziție determinată prin unghiul φ depinde de combinația dintre cele două moduri elementare (figura 7.8). Astfel, relațiile obținute

de Lazzarin și Berto (2005b) pentru modul I de solicitare nu se aplică în această problemă.

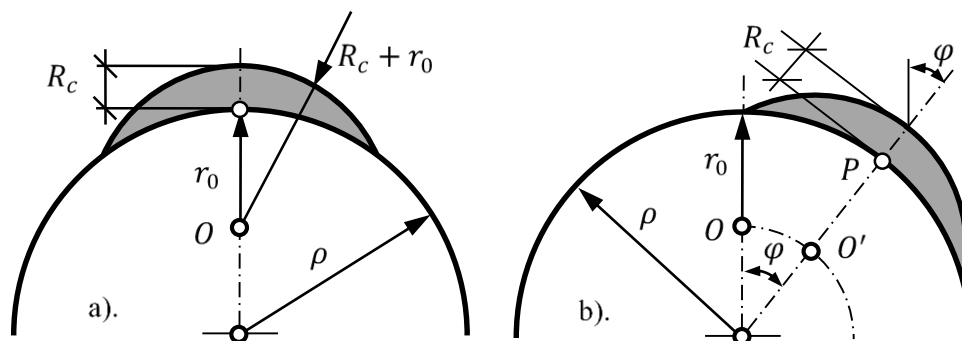


Figura 7.8. a). Suprafața de control pentru o creștătură U – modul I de solicitare;

b). Suprafața de control pentru o creștătură U – modul mixt de solicitare, Gómez ș.a. (2007)

Pentru a depăși acest inconvenient, Berto ș.a. (2007) au obținut o relație echivalentă pentru calcul energiei specifice de deformație medie \bar{W}_1 :

$$\bar{W}_1 = \frac{\pi \sigma_{max}^2}{4E} H^* \left(\frac{R_c}{\rho} \right) \quad (7.58)$$

unde funcția $H^*(R_c/\rho)$ depinde de coeficientul lui Poisson ν , de raza normalizată R_c/ρ și de combinația dintre modul I și II.

La predominanța modului I de solicitare, diferențele dintre valorile funcțiilor H și H^* sunt mai mici de 1%. În schimb, la predominanța modului II de solicitare, diferențele sunt plasate în intervalul 5÷8,5%.

Bazată pe calculul numeric al energiei specifice de deformație \bar{W}_1 , în particular analiza cu metoda elementului finit, Gómez ș.a. (2007) au dezvoltat o metodă alternativă pentru modul mixt de solicitare. Ipotezele de calcul sunt următoarele:

a). suprafața de control, care-și păstrează forma de semilună, se obține în modul mixt I+II prin rotirea suprafeței de control determinată în modul I, astfel încât să fie centrată în punctul P de tensiune maximă, figura 7.8b;

b). valoarea critică a energiei specifice W_c determinată pentru modul I rămâne valabilă și pentru modul mixt de solicitare I+II.

Criteriul ASED a fost utilizat la estimarea ruperii fragile a materialelor poliuretanică în prezența creștăturilor U, în modul mixt de solicitare I+II, de Rus (2013), Filipescu ș.a. (2014).

7.2.4. Aplicarea criteriului ASED la evaluarea rezistenței la oboseală

Cedarea prin oboseală în regimul durabilităților mari, chiar în prezența concentratorilor de tensiune, se produce, în mod uzual, în domeniul liniar-elastic. Astfel, acceptând această observație, criteriul ASED a fost aplicat la evaluarea rezistenței la oboseală a îmbinărilor sudate din oțeluri de construcții, Lazzarin ș.a. (2004), Livieri și Lazzarin (2005), Lazzarin ș.a. (2008a), Berto și Lazzarin (2009).

Abordarea ține cont de configurația geometrică a îmbinării, cu scopul de a dezvolta o metoda simplă și eficientă de evaluare a rezistenței la oboseală, introducând o serie de simplificări, ilustrate pe sudura de colț din figura 7.9: raza la rădăcina sudurii $\rho = 0$ și deschiderea unghiulară $2\alpha = 135^\circ$.

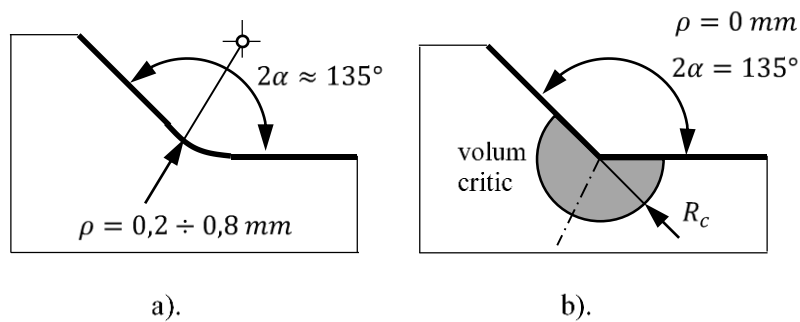


Figura 7.9. a). Geometria reală; b). Geometria simplificată, Berto și Lazzarin (2009)

Cealalți factori care influențează rezistența la oboseală a îmbinării sudate, și anume, tensiunile remanente, neomogenitățile materialului în zona îmbinării sudate, procesul tehnologic, sunt abordați statistic.

Cu aceste ipoteze formulate, valoarea medie a variației energiei specifice de deformație $\overline{\Delta W}$ determinată pe un volum critic de rază R_c (figura 7.10) este o mărime scalară care se poate exprima în funcție de NSIF în modul mixt I-II, pentru problemele plane, sau în funcție de NSIF în modul I-III, în situațiile tridimensionale, Lazzarin ș.a. (2008a):

$$\overline{\Delta W} = \frac{e_1}{E} \left(\frac{\Delta K_I}{R_c^{1-\lambda_1}} \right)^2 + \frac{e_2}{E} \left(\frac{\Delta K_{II}}{R_c^{1-\lambda_2}} \right)^2 + \frac{e_3}{E} \left(\frac{\Delta K_{III}}{R_c^{1-\lambda_3}} \right)^2 \quad (7.59)$$

unde valorile pentru e_1 , e_2 , e_3 sunt date în funcție de deschiderea unghiulară 2α și coeficientul lui Poisson ν , Berto și Lazzarin (2009).

Raza R_c a volumului de control se determină pe baza rezistenței la oboseală $\Delta\sigma_A$ a îmbinărilor sudate cap la cap, care include influența procesului tehnologic, în absența concentratorilor de tensiune, figura 7.11, cu relația:

$$R_c = \left(\frac{\sqrt{2e_1} \Delta K_{IA}^V}{\Delta\sigma_A} \right)^{1/1-\lambda_1} \quad (7.60)$$

unde ΔK_{IA}^V este rezistența la oboseală exprimată prin variația NSIF pentru o îmbinare sudată de colț, cu deschiderea unghiulară 2α suficient de mare astfel încât să asigure singularitatea câmpului tensiunilor în modul II de solicitare. Evaluarea razei critice R_c se efectuează la o durată de viață egală cu N_A cicluri ($2 \cdot 10^6 \div 5 \cdot 10^6$ cicluri) și un coeficient de asimetrie al ciclului de solicitare $R = 0$.

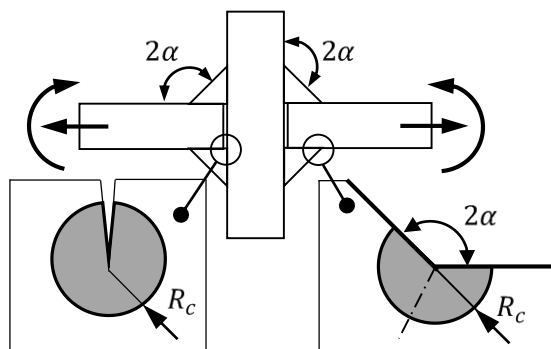


Figura 7.10. Îmbinare sudată în cruce, Lazzarin ș.a. (2008a)

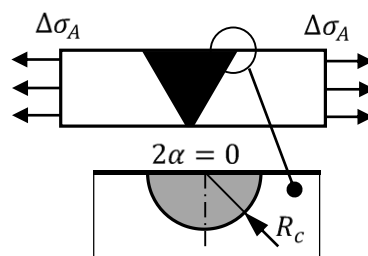


Figura 7.11. Îmbinare sudată cap la cap

De influența coeficientului de asimetrie R al ciclului de solicitare, determinat pentru sarcina nominală aplicată, se ține cont prin coeficientul c_w introdus de Lazzarin ș.a. (2004):

$$c_w(R) = \begin{cases} \frac{1 + R^2}{(1 - R)^2} & \text{pentru } -1 \leq R \leq 0 \\ 1 & \text{pentru } R = 0 \\ \frac{1 - R^2}{(1 + R)^2} & \text{pentru } 0 \leq R \leq 1 \end{cases} \quad (7.61)$$

Astfel, valoarea medie a variației energiei specifice de deformație $\overline{\Delta W}$ se determină:

$$\overline{\Delta W} = c_w \left\{ \frac{e_1}{E} \left(\frac{\Delta K_I}{R_c^{1-\lambda_1}} \right)^2 + \frac{e_2}{E} \left(\frac{\Delta K_{II}}{R_c^{1-\lambda_2}} \right)^2 + \frac{e_3}{E} \left(\frac{\Delta K_{III}}{R_c^{1-\lambda_3}} \right)^2 \right\} \quad (7.62)$$

Criteriul ASED, în abordarea formulată de (7.62), a fost utilizat la evaluarea cedării prin oboseală multiaxială în modul I+III, în prezența concentratorilor de tensiune de tipul creștătură V rotunjită la vârf, Atzori ș.a. (2006), Berto ș.a. (2011a), Berto și Lazzarin (2011b), Berto ș.a. (2014).

Dacă raza ρ la vârful creștăturii este prea mare pentru a neglija efectului ei în calculul NSIF, Atzori ș.a. (2006) au propus calculul variației energiei totale ΔW_t în punctul caracterizat prin tensiunea maximă, astfel:

$$\Delta W_t = \frac{c_w}{2E} (\Delta\sigma_{max}^2 + 2(1+\nu)\Delta\tau_{max}^2) = \frac{c_w}{2E} (K_\sigma^2 \Delta\sigma_{nom}^2 + 2(1+\nu)K_\tau^2 \Delta\tau_{nom}^2) \quad (7.63)$$

unde $\Delta\sigma_{max}$ și $\Delta\tau_{max}$ reprezintă variațiile tensiunilor maxime normală și tangențială, $\Delta\sigma_{nom}$ și $\Delta\tau_{nom}$ sunt variațiile tensiunilor nominale aplicate în secțiunea netă, iar K_σ și K_τ sunt coeficienții teoretici de concentrare a tensiunilor pentru cele două sollicitări.

Pentru oboseala multiaxială în modul I+III, la aplicarea sarcinilor în opoziție de fază, se produce un fenomen de interferență a fisurilor și contactul dintre fețele lor. Evaluarea rezistenței la oboseală, cu bune rezultate, face necesară utilizarea unor raze diferite R_1 și R_3 ale volumelor de control, atribuibile celor două sollicitări, Berto ș.a. (2011a):

$$R_1 = \left(\frac{\sqrt{2e_1} \times \Delta K_{IA}^V}{\Delta\sigma_{IA}} \right)^{1/1-\lambda_1}, \quad R_3 = \left(\frac{\sqrt{e_3} \times \Delta K_{III A}^V}{\sqrt{1+\nu} \times \Delta\tau_{III A}} \right)^{1/1-\lambda_3} \quad (7.64)$$

Rezistențele la oboseală $\Delta\sigma_{IA}$ și $\Delta\tau_{III A}$ pentru cele două moduri de sollicitare, precum și variațiile factorilor de intensitate a tensiunii ΔK_{IA}^V și $\Delta K_{III A}^V$ se calculează la același număr de cicluri N_A până la cedare.

Astfel, valoarea medie a variației energiei specifice de deformație $\overline{\Delta W}$ se determină:

$$\overline{\Delta W} = \frac{c_w}{E} \left[e_1 \times \left(\frac{\Delta K_I^V}{R_1^{1-\lambda_1}} \right)^2 + e_3 \times \left(\frac{\Delta K_{III}^V}{R_3^{1-\lambda_3}} \right)^2 \right] \quad (7.65)$$

Utilizarea criteriului ASED la evaluarea integrității structurale are o serie de avantaje, Lazzarin ș.a. (2008b), Berto și Lazzarin (2009, 2014):

- în opoziție cu evaluarea directă a NSIF pentru care este necesară o discretizare fină în zona de la vârful concentratorilor de tensiune, estimarea valorii medii a SED pe volumul de control se poate realiza cu exactitate utilizând o discretizare grosieră;

- criteriul ASED ține cont de contribuția diferitelor moduri de solicitare și de asimetria ciclului de solicitare;
- criteriul ASED ține cont de efectul tensiunilor nesingulare T , tensiuni care nu sunt neglijabile în cazul pieselor de grosime mică;
- calculul valorii medii a SED pe un volum de control cuprinde și efectele tridimensionale din zona de la vârful concentratorului de tensiune;
- valoarea medie a SED fiind o mărime scalară, neajunsul legat de unitatea de măsură a NSIF este surmontat;
- calculul valorii medii a SED pe un volum de control de la vârful concentratorului de tensiune surmontează problema complexă a inițierii multiple și a interacțiunii dintre fisuri.

Valorile critice ale energiei elastice W_c și razei de control R_c nu sunt independente, în principiu, de tipul solicitării. În cazul oboselii multiaxiale, raza R_c a volumului de control este diferită la torsiune, prin comparație cu valoarea determinată la întindere.

De asemenea, Berto și Lazzarin (2011b) recomandă ca raza R_c să se determine *a posteriori* ca raza care asigură, pentru componentele cu concentratori de tensiune, o valoare medie a SED pe volumul de control egală cu cea obținută pentru epruvetele fără concentratori de tensiune la o durată de viață de $2 \cdot 10^6$ cicluri.

7.3. Metoda modelării fisurii

Metoda modelării fisurii (*Crack Modelling Method, CMM*) reprezintă o abordare bazată pe conceptele mecanicii ruperii liniar-elastice și este utilizată la estimarea rezistenței la oboseală în domeniul durabilităților mari pentru componentele cu concentratori de tensiune, Taylor (1996), Taylor ș.a. (1997), Wang ș.a. (2000). Metoda modelează un anumit concentrator de tensiune ca pe o fisură având o geometrie standard: placă infinită cu fisură centrală străpunsă.

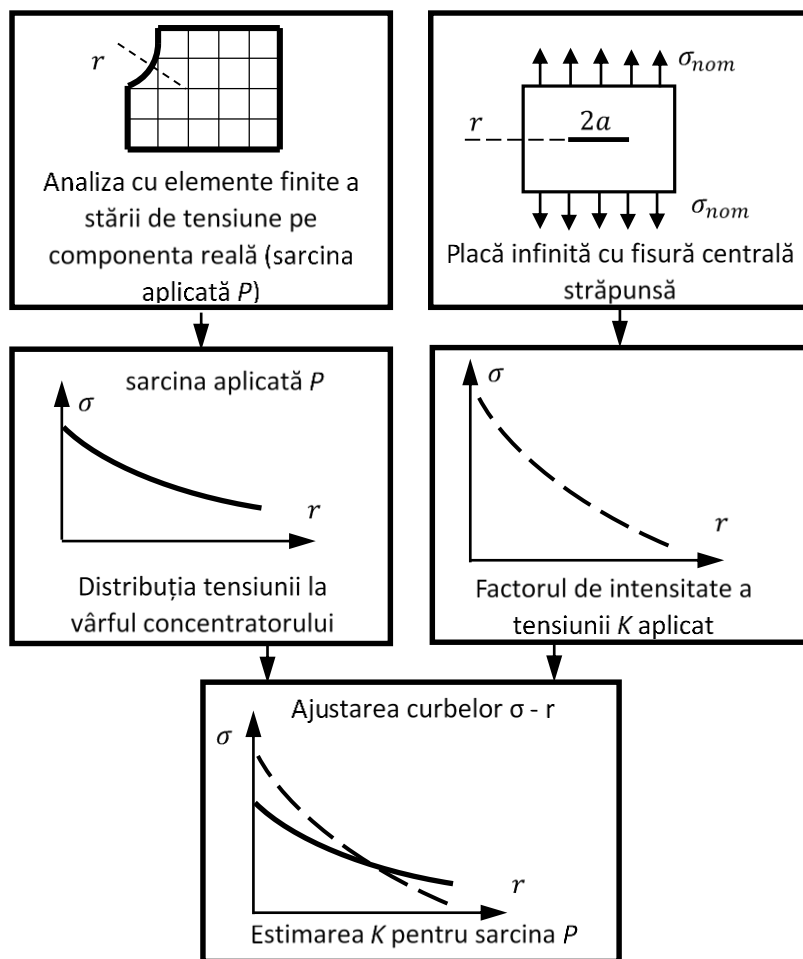


Figura 7.12. Metodologia de aplicare a CMM, Taylor (1996)

Metodologia de aplicare a CMM este ilustrată în figura 7.12. Pentru componenta reală, de obicei cu o geometrie complexă, distribuția tensiunii normale principale maxime σ_1 în funcție de distanța r se obține din analiza liniar-elastică cu elemente finite,

la sarcina aplicată P . Soluția analitică a lui Westergaard (1939), pentru placa infinită cu fisură centrală străpunsă, descrie distribuția tensiunii σ_θ la vârful fisurii:

$$\sigma_\theta(r, \theta = 0) = \frac{\sigma_{nom}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{a}{a+r}\right)^2\right]}} \quad (7.66)$$

unde $2a$ este lungimea fisurii și σ_{nom} reprezintă tensiunea nominală aplicată.

În continuare, sunt comparate cele două soluții, cea numerică pentru concentratorul real de tensiune cu soluția analitică pentru fisură. Prin modificarea parametrilor $2a$ și σ_{nom} din ecuația (7.66) se determină soluția care ajustează optim distribuția tensiunii $\sigma_1 - r$ a componentei structurale reale. Se introduce astfel un factor echivalent de intensitate a tensiunii:

$$K = \sigma_{nom} \sqrt{\pi a} \quad (7.67)$$

pentru piesa reală.

În final, rezistența la oboseală a componentei investigate, în forma sarcinii ciclice aplicate ΔP , se obține ca sarcina pentru care factorul echivalent K de intensitate a tensiunii egalează valoarea de prag ΔK_{th} pentru materialul piesei.

Taylor și Carr (1999) au studiat influența anumitor factori asupra preciziei estimărilor obținute prin ajustarea celor două curbe tensiune-distanță: limitele r_{min} și r_{max} între care se optimizează ajustarea, densitatea rețelei de elemente finite, soluția utilizată pentru a descrie câmpul tensiunilor la vârful fisurii.

Pentru optimizarea ajustării curbelor $\sigma - r$, Taylor și Carr (1999) au propus minimizarea ariei suprafeței dintre acestea, adică minimizarea sumei:

$$f_A = \sum_{i=1}^{n-1} |A_{i,W} - A_{i,FEA}| \quad (7.68)$$

pentru cele n perechi de valori $(\sigma_i - r_i)$, aria A_i fiind evaluată prin integrare numerică.

Eroarea relativă de ajustare E_a a celor două curbe $\sigma - r$ se calculează astfel:

$$\varepsilon_A = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} |A_{i,W} - A_{i,FEA}|}{\sum_{i=1}^{n-1} A_{i,FEA}} \cdot 100 [\%] \quad (7.69)$$

Abordarea CMM prezintă avantajul că implică cunoașterea unui număr minim de caracteristici mecanice pentru materialul piesei investigate. S-a dovedit utilă pentru concentratorii de tensiune care au o rază ρ la vârf mai mică decât o anumită valoare critică, adică în cazul concentratorilor ascuțiți al căror comportament la oboseală este similar cu al fisurilor. Estimările pentru concentratorii bonți (rază mare la vârf) sunt conservative, afectate de erori semnificative.

7.4. Metoda volumetrică

Metoda volumetrică (*Volumetric Method*) reprezintă o abordare locală, care utilizează distribuția tensiunilor elasto-plastice de la vârful concentratorilor de tensiune, în predicția rezistenței la oboseală. Metoda volumetrică pornește de la ipoteza că acumularea deteriorărilor la solicitări ciclice depinde de tensiunea medie în zona de proces, de gradientul relativ al tensiunii, nu doar de tensiunea maximă de la vârful concentratorului de tensiune.

Pluinage (1998, 2003) distinge trei zone în distribuția tensiunilor elasto-plastice din zona vârfului unei creștături, figura 7.13:

- zona I în care tensiunea este aproape constantă, la o valoare maximă σ_{max} ;
- zona II de tranziție;
- zona III caracterizată de o pseudo-singularitate a tensiunii

$$\sigma_{yy}(x) = \frac{C}{x^\alpha} \quad (7.70)$$

unde constantele C și α depind de geometria creștăturii și de solicitarea aplicată.

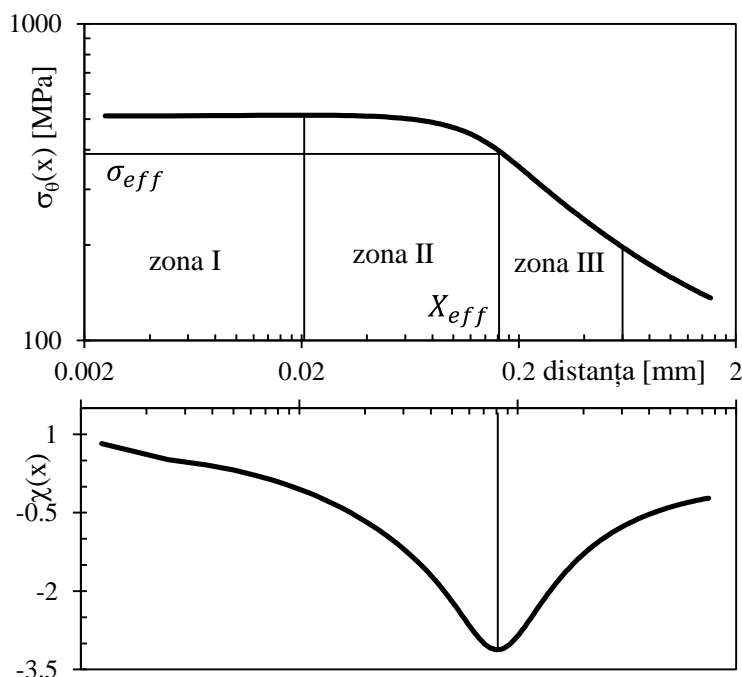


Figura 7.13. Distribuția tensiunilor elasto-plastice σ_θ și variația gradientului relativ $\chi(x)$

Etapele de aplicare a metodei volumetrică în estimarea rezistenței la oboseală sunt redată în figura 7.14. Abordarea volumetrică calculează o tensiune medie, denumită

tensiune efectivă σ_{eff} , prin integrare pe o distanță efectivă X_{eff} , considerată ca frontiera zonei de proces, considerând și efectul ponderat al gradientului tensiunii. Aceste mărimi efective marchează începutul zonei de pseudo-singularitate a tensiunii. În mod obișnuit, distanța efectivă X_{eff} se determină din curba tensiune – distanță, reprezentată în coordonate dublu- logaritmice, ca punctul în care gradientul relativ al tensiunii:

$$\chi(x) = \frac{1}{\sigma_{\theta}(x)} \frac{\partial \sigma_{\theta}(x)}{\partial x} \quad (7.71)$$

atinge minimumul său. În ecuația (7.71), $\sigma_{\theta}(x)$ este tensiunea de deschidere a creștăturii sau tensiunea normală maximă, iar pentru modul I de solicitare se reprezintă de-a lungul bisectoarei deschiderii unghiulare a creștăturii.

Tensiunea efectivă σ_{eff} se obține prin integrare pe distanța efectivă X_{eff} :

$$\sigma_{eff} = \frac{1}{X_{eff}} \int_0^{X_{eff}} \sigma_{\theta}(x) \times \varphi(x, \chi) dx \quad (7.72)$$

unde funcția de ponderare $\varphi(x, \chi)$ este introdusă cu scopul de a evidenția efectul gradientului tensiunii la vârful concentratorului. Adib-Ramezani și Jeong (2007) au subliniat faptul că funcția de ponderare depinde în mod explicit de gradientul tensiunii în zona de acumulare a deteriorărilor. De asemenea, în mod implicit, funcția $\varphi(x, \chi)$ depinde de geometria concentratorului, de tipul solicitării și de proprietățile materialului. Funcția de ponderare trebuie să îndeplinească condițiile, așa cum recomandă Adib-Ramezani și Jeong (2007):

$$0 \leq \varphi(x, \chi) \leq 1; \quad \varphi(0, \chi(0)) = 1; \quad \varphi(x_{max}, \chi(x_{max})) = 1 \quad (7.73)$$

Prima condiție definește domeniul de valori al funcției pondere, cea de-a doua indică contribuția tensiunii maxime de la vârful concentratorului, iar ultima definește gradientul tensiunii în epruveta fără creștătură. O comparație a diferitelor funcții de ponderare este prezentată pe larg de Adib-Ramezani și Jeong (2007).

Urmând etapele metodei volumetrică, se calculează coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor K_f , denumit și factor de reducere a rezistenței la oboseală:

$$K_f = \frac{1}{\sigma_{nom} X_{eff}} \int_0^{X_{eff}} \sigma_{\theta}(x) \times \varphi(x, \chi) dx \quad (7.74)$$

unde tensiunea nominală σ_{nom} se referă la secțiunea netă.

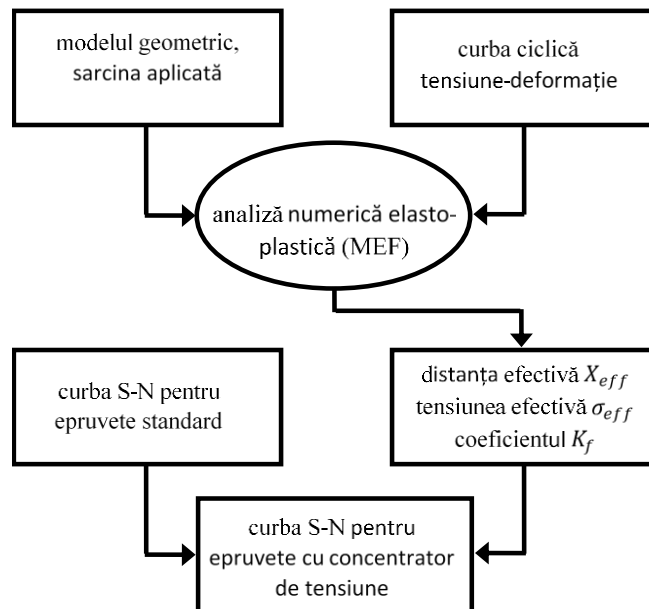


Figura 7.14. Etapele de aplicare a metodei volumetrică, Adib și Pluvinage (2003)

Urmând etapele metodei volumetrică, se calculează coeficientul efectiv de concentrare a tensiunilor K_f , denumit și factor de reducere a rezistenței la oboseală:

$$K_f = \frac{1}{\sigma_{nom} X_{eff}} \int_0^{X_{eff}} \sigma_{\theta}(x) \times \varphi(x, \chi) dx \quad (7.74)$$

unde tensiunea nominală σ_{nom} se referă la secțiunea netă.

În final, la un anumit număr de cicluri până la cedare și aceleași condiții de testare, rezistența la oboseală în prezența concentratorului de tensiune $\Delta\sigma_n$ se estimează:

$$\Delta\sigma_n = \frac{\Delta\sigma_0}{K_f} \quad (7.75)$$

pe baza rezistenței la oboseală $\Delta\sigma_0$ a epruvetelor standard.

Metoda volumetrică a fost utilizată pentru estimarea rezistenței la oboseală a epruvetelor plate cu concentratori laterali semicirculari, Adib-Ramezani și Jeong (2007), a epruvetelor cilindrice cu creștături circumferențiale și concentratori tip canal de pană, Qylafku ș.a. (1999), respectiv a îmbinărilor sudate în puncte, Adib ș.a. (2004). Ruperea în modul mixt I+II a fost studiată pe epruvete tip inel cu creștătură U confecționate din oțelul de mare rezistență 45CDS6 de către El Minor ș.a. (2002), utilizând metoda volumetrică.

Bibliografie

Adib H., Gilgert J., Pluvinage G. (2004) Fatigue life duration prediction for welded spots by volumetric method, *International Journal of Fatigue* 26, 81-94.

Adib H., Pluvinage G. (2003) Theoretical and numerical aspects of the volumetric approach for fatigue life prediction in notched components, *International Journal of Fatigue* 25, 67-76.

Adib-Ramezani H., Jeong J. (2007) Advanced volumetric method for fatigue life prediction using stress gradient effects at notch roots, *Computational Materials Science* 39, 649-663.

Atzori B., Berto F., Lazzarin P., Quaresimin M. (2006) Multi-axial fatigue behaviour of a severely notched carbon steel, *International Journal of Fatigue* 28, 485-493.

Ayatollahi M.R., Torabi A.R. (2009) A criterion for brittle fracture in U-notched components under mixed-mode loading, *Engineering Fracture Mechanics* 76, 1883-1896.

Barati E., Alizadeh Y., Mohandesi J.A. (2011) Relationship between J-integral and averaged strain-energy density for U-notches in the case of large control volume under mode I loading, *Engineering Fracture Mechanics* 78, 1317-1322.

Bellet D., Taylor D., Marco S., Mazzeo E., Guillois J., Pircher T. (2005) The fatigue behaviour of three-dimensional stress concentrations, *International Journal of Fatigue* 27, 207-221.

Berto F., Lazzarin P., Gómez F.J., Elices M. (2007) Fracture assessments of U-notches under mixed mode loading: two procedures based on the equivalent local mode I concept, *International Journal of Fracture* 148, 415-433.

Berto F., Lazzarin P. (2009) A review of the volume-based strain energy density approach applied to V-notches and welded structures, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 52, 183-194.

Berto F., Lazzarin P., Yates J.R. (2011a) Multiaxial fatigue of V-notched steel specimens: a non-conventional application of the local energy method, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 34, 921-943.

Berto F., Lazzarin P. (2011b) Fatigue strength of structural components under multi-axial loading in terms of local energy density averaged on a control volume, *International Journal of Fatigue* 33, 1055-1065.

Berto F., Lazzarin P., Tovo R. (2014) Multiaxial fatigue strength of severely notched cast iron specimens, *International Journal of Fatigue* 67, 15-27.

Berto F., Lazzarin P. (2014) Recent developments in brittle and quasi-brittle failure assessment of engineering materials by means of local approaches, *Materials Science and Engineering R* 75, 1-48.

El Minor H., Louah M., Azari Z., Pluvinage G., Kifani A. (2002) Brittle mixed-mode (I+II): Application of the equivalent notch stress intensity factor to cracks emanating from notches, *Strength of Materials* 34, 570-577.

Filipescu H.E., Căplescu C., Pașca N. (2014) Assessment of UMTS and averaged SED fracture criteria for U-notched specimens, *12th International Conference on Fracture and Damage Mechanics, FDM 2013, 17-19 September, Sardinia, Italia 2013, Key Engineering Materials* vols. 577-578 (2014), 113-116.

Gómez F.J., Elices M., Berto F., Lazzarin P. (2007) Local strain energy to assess the static failure of U-notches in plates under mixed mode loading, *International Journal of Fracture* 145, 29-45.

Gómez F.J., Elices M., Berto F., Lazzarin P. (2008) A generalised notch stress intensity factor for U-notched components loaded under mixed mode, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 4819-4833.

Kinloch A.J., Williams J.G. (1980) Crack blunting mechanisms in polymers, *Journal of Materials Science* 15, 987-996.

Lazzarin P., Tovo R. (1996) A unified approach to the evaluation of linear elastic stress fields in the neighborhood of cracks and nothes, *International Journal of Fracture* 78, 3-19.

Lazzarin P., Tovo R., Meneghetti G. (1997) Fatigue crack initiation and propagation phases near notches in metals with low notch sensitivity, *International Journal of Fatigue* 19, 647-657.

Lazzarin P., Zambardi R. (2001) A finite-volume-energy based approach to predict the static and fatigue behavior of components with sharp V-shaped notches, *International Journal of Fracture* 112, 275-298.

Lazzarin P., Sonsino C.M., Zambardi R. (2004) A notch stress intensity approach to assess the multiaxial fatigue strength of welded tube-to-flange joints subjected to combined loadings, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 27, 127-140.

Lazzarin P., Berto F. (2005a) Some expressions for the strain energy in a finite volume surrounding the root of blunt V-notches, *International Journal of Fracture* 135, 161-185.

Lazzarin P., Berto F. (2005b) From Neuber's elementary volume to Kitagawa and Atzori's diagrams: an interpretation based on local energy, *International Journal of Fracture* 135, L33-L38.

Lazzarin P., Livieri P., Berto F., Zappalorto M. (2008a) Local strain energy density and fatigue strength of welded joints under uniaxial and multiaxial loading, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 1875-1889.

Lazzarin P., Berto F., Gómez F.J., Zappalorto M. (2008b) Some advantages derived from the use of the strain energy density over a control volume in fatigue strength assessments of welded joints, *International Journal of Fatigue* 30, 1345-1357.

Lazzarin P., Berto F., Zappalorto M. (2010) Rapid calculations of notch stress intensity factors based on average strain energy density from coarse meshes: Theoretical bases and applications, *International Journal of Fatigue* 32, 1559-1567.

Livieri P., Lazzarin P. (2005) Fatigue strength of steel and aluminium welded joints based on generalised stress intensity factors and local strain energy values, *International Journal of Fracture* 133, 247-276.

McClintock F.A., Irwin G.R. (1965) Plasticity aspects in fracture mechanics, *ASTM STP – Fracture Toughness Testing and its Applications* 381, 84-113, ASTM, Philadelphia.

Negru R.M. (2009) *Contribuții la studiul efectului de concentrare a tensiunilor cu aplicații în mecanica ruperii și oboseala materialelor*, Editura Politehnica, Timișoara (Teză de doctorat).

Negru R., Marșavina L., Căplescu C., Filipescu H. (2013) Assessment of brittle mixed-mode fracture using the theory of critical distances, *International Conference on Innovative Technologies, IN-TECH 2013, Budapest, 10-12 september 2013*, 313-316.

Negru R., Marsavina L., Filipescu H., Căplescu C., Voiconi T. (2015a) Assessment of brittle fracture for PUR materials using local strain energy density and theory of critical distances, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 79, 62-69.

Negru R., Marsavina L., Voiconi T., Linul E., Filipescu H., Belgiu G. (2015b) Application of TCD for brittle fracture of notched PUR materials, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 80, 87-95.

Novozhilov V.V. (1969) On a necessary and sufficient criterion for brittle strength, *Prikl. Mat. Mek.* 33, 201-210.

- Neuber H. (1958) *Theory of Notch Stresses*, Springer-Verlag, Berlin.
- Peterson R.E. (1959) Notch-sensitivity, in: *Metal Fatigue* (ed. Sines G., Waisman J.L.), McGraw Hill, New York, 293-306.
- Pluvinage G. (1998) Fatigue and fracture emanating from notch; the use of the notch stress intensity factor, *Nuclear Engineering and Design* 185, 173-184.
- Pluvinage G. (2003) *Fracture and Fatigue Emanating from Stress Concentrators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- Qylafku G., Azari Z., Kadi N., Gjonaj M., Pluvinage G. (1999) Application of a new model proposal for fatigue life prediction on notches and key-seats, *International Journal of Fatigue* 21, 753-760.
- Rus H.E. (2013) *Investigarea ruperii fragile în modul mixt pe materiale poliuretanică*, Editura Politehnică, Timișoara (Teză de Doctorat).
- Susmel L., Taylor D. (2007) A novel formulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components in the medium-cycle fatigue regime, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 30, pp. 567-581.
- Susmel L., Taylor D. (2008a) On the use of the Theory of Critical Distances to predict static failures in ductile materials containing different geometrical features, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 4410-4421.
- Susmel L., Taylor D. (2008b) The Theory of Critical Distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 534-550.
- Susmel L., Taylor D. (2010) The theory of critical distances as an alternative experimental strategy for the determination of K_{Ic} and ΔK_{th} , *Engineering Fracture Mechanics* 77, pp. 1492-1501.
- Tanaka K. (1983) Engineering formulae for fatigue strength reduction due to crack-like notches, *International Journal of Fracture* 22, R39-R45.
- Taylor D. (1996) Crack modelling: a technique for the fatigue design of components, *Engineering Failure Analysis* 3, 129-136.
- Taylor D., Ciepalowicz A.J., Rogers P., Devlukia J. (1997) Prediction of fatigue failure in a crankshaft using the technique of crack modelling, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 20, 13-21.
- Taylor D. (1999) Geometrical effects in fatigue: a unifying theoretical model, *International Journal of Fatigue* 21, 413-420.
- Taylor D., Carr A.J. (1999) The crack-modelling technique: optimization of parameters, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 22, 41-50.

Taylor D. (2004) Predicting the fracture strength of ceramic materials using the theory of critical distances, *Engineering Fracture Mechanics* 71, 2407-2416.

Taylor D. (2007) *The Theory of Critical Distances. A New Perspective in Fracture Mechanics*, Elsevier, London.

Wang G., Taylor D., Bouquin B., Devlukia J., Ciepalowicz A. (2000) Prediction of fatigue failure in a camshaft using the crack modelling method, *Engineering Failure Analysis* 7, 189-197.

Westergaard H.M. (1939) Bearing pressures and cracks, *Journal of Applied Mechanics* 6, A49-A53.

Whitney J.M., Nuismer R.J. (1974) Stress fracture criteria for laminated composites containing stress concentrations, *Journal of Composite Materials* 8, 253-265.

Yosibash Z., Bussiba A., Gilad I. (2004) Failure criteria for brittle elastic materials, *International Journal of Fracture* 125, 307-333.

8. Aplicații ale metodelor moderne la estimarea ruperii fragile și a durabilității

8.1. Estimarea ruperii fragile a materialelor poliuretanic

8.1.1. Aplicarea TCD la ruperea fragilă a epruvetelor cu concentratori de tensiune solicitate în modul I și modul mixt I+II

Materialele poliuretanic se produc într-o gamă largă de densități:

- la densități scăzute, cuprinse în intervalul $30 - 200 \text{ kg/m}^3$, se prezintă ca spume rigide cu o structură celulară închisă, aplicațiile lor fiind diverse - componente pentru scaunele autoturismelor, panouri izolatoare, etanșări și garnituri, bușe etc.;
- la densități superioare, de peste 200 kg/m^3 , prezintă o structură solidă poroasă, cu utilizări ca dispozitive de prindere și etaloane, matrițe, mufe și conectori pentru componente electronice.

Proprietățile mecanice ale materialelor poliuretanic sunt influențate de proprietățile materialului solid de bază, de geometria structurii celulare și de densitatea relativă, Gibson și Ashby (1997). Solicitate la compresiune absorb o cantitate mare de energie prin densificare. În schimb, solicitate la tracțiune au un comportament liniar-elastic până la rupere și cedează într-un mod fragil, Marsavina (2010).

Materiale poliuretanic cu cinci densități diferite, produse de Necumer GmbH Germania sub denumirea comercială de Necuron, au fost utilizate cu scopul de a investiga ruperea lor fragilă în prezența concentratorilor de tensiune.

Caracteristicile elastice și mecanice sunt centralizate în tabelul 8.1. Modulul de elasticitate longitudinală E și coeficientul de contracție transversală ν au fost determinate prin tehnica excitației prin impuls, conform ASTM E-1876-01, iar rezistența de rupere la întindere σ_r urmând reglementările EN ISO 572: 2012, Marșavina ș.a. (2014a).

Tabelul 8.1. Proprietățile elastice și mecanice ale materialelor poliuretanic, Negru ș.a. (2015)

| Densitate kg/m^3 | 100 | 145 | 300 | 708 | 1218 |
|---|------------|------------|------------|------------|-------------|
| E (MPa) | 30 | 67 | 281 | 1250 | 3340 |
| ν (-) | 0,285 | 0,285 | 0,302 | 0,302 | 0,343 |
| σ_r (MPa) | 1,16 | 1,87 | 3,86 | 17,40 | 49,75 |

Rezultate experimentale. Epruvete cu trei concentratori de tensiune diferiți, figura 8.1, au fost încercate la tracțiune monoaxială (modul I). Testele au fost efectuate la temperatura ambiantă, pe o mașină universală Zwick/Roell Z005 cu forța maximă dezvoltată de 5 kN, la o viteză controlată de 2 mm/min.

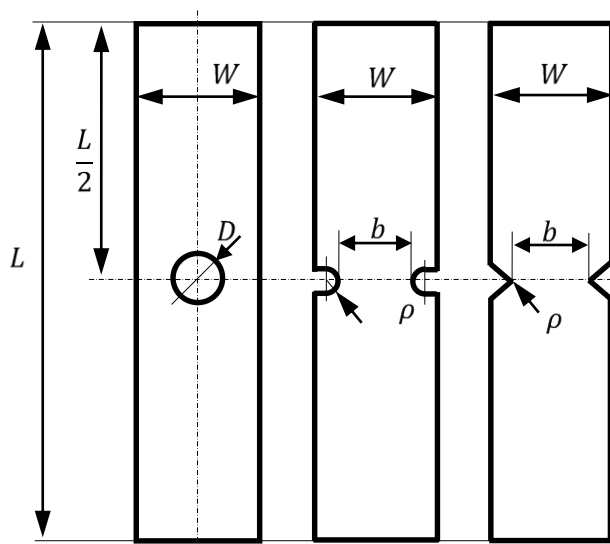


Figura 8.1. Geometria epruvetelor testate la tracțiune monoaxială, Negru ș.a. (2015)

Câte patru epruvete au fost testate pentru fiecare densitate și geometrie a concentratorului. Rezultatele experimentale, reprezentând forța maximă F_{max} înregistrată, sunt prezentate în tabelele 8.2 și 8.3, iar câteva curbe forță-deplasare sunt ilustrate în figura 8.2.

Tabelul 8.2. Dimensiunile și forța maximă (valoare medie), Negru ș.a. (2015)

| | Dimensiuni (mm) | | | | | Densitate (kg/m³) | | | |
|--------------|------------------------|----------|----------|----------|--------|-------------------------------------|--------|--------|---------|
| | <i>l</i> | <i>W</i> | <i>b</i> | <i>D</i> | ρ | 100 | 145 | 300 | 708 |
| | | | | | | F_{max} (N) | | | |
| Tip V | 100 | 25 | 15 | - | 0,25 | 146,39 | 196,63 | 353,74 | 1811,43 |
| Tip U | | | 15 | - | 2 | 189,45 | 262,67 | 347,71 | 2109,96 |
| Tip O | | | - | 10 | - | 187,89 | 267,31 | 521,50 | 1960,31 |

Pentru epruvetele cu creștătură V (figura 8.2a) se observă că forța maximă F_{max} crește semnificativ cu densitatea materialelor poliuretanicе, de la 146,39 N, pentru densitatea de 100 kg/m³, la 1811,43 N, pentru densitatea egală cu 708 kg/m³. În figura 8.2b este ilustrat efectul geometriei concentratorului asupra forței maxime F_{max} de cedare, pentru epruvetele cu densitatea de 708 kg/m³. Valoarea forței înregistrate scade cu raza de la vârful concentratorului de tensiune.

Tabelul 8.3. Forța maximă pentru epruvetele cu gaură circulară (valoare medie), Negru ș.a. (2015)

| <i>Tip O</i> | <i>l = 100 (mm) W = 25 (mm)</i> | | | | | | | |
|----------------------------|---------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <i>D (mm)</i> | 10 | 8 | 7 | 6 | 5 | 3,5 | 2,5 | 1 |
| <i>F_{max} (N)</i> | 1960,31 | 2197,27 | 2290,76 | 2491,03 | 2544,66 | 2944,64 | 2961,78 | 3309,19 |

De asemenea, curbele forță-deplasare prezintă o dependență liniară până la ruperea epruvetei, cu scăderea bruscă a forței după atingerea nivelului maxim. Absența deformațiilor plastice și liniaritatea forță-deplasare indică o cedare prin rupere fragilă.

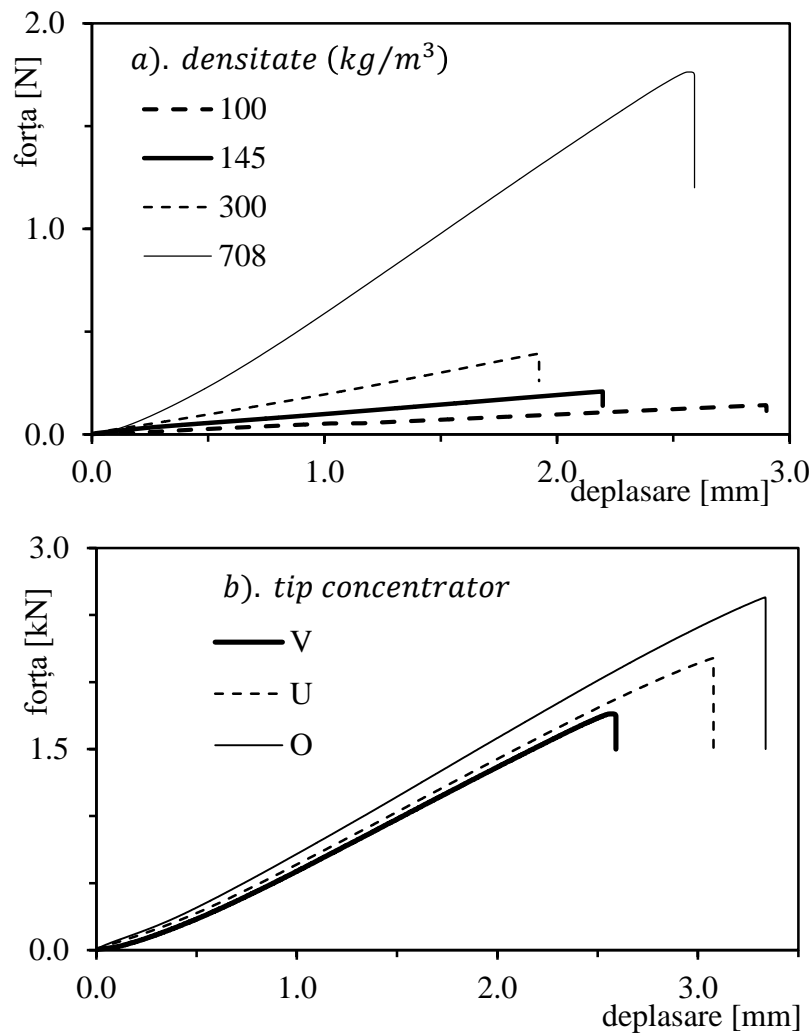


Figura 8.2. Curbele forță-deplasare pentru epruvetele testate la tracțiune: a). efectul densității (creșterea V); b). geometria concentratorului (densitate $708 kg/m^3$), Negru ș.a. (2015)

Testele de mecanica ruperii în modul mixt I+II au fost efectuate de Rus (2013) pe epruvete de încovoiere în trei puncte cu creștătură laterală în formă de U (SENB), pentru trei valori diferite ale razei la vârful concentratorului, și anume $0,75\text{ mm}$, 1 mm și 2 mm . A fost evaluat doar poliuretanul cu densitatea de 1218 kg/m^3 . Cu scopul de a atinge întreaga gamă a combinațiilor dintre modul I și II, începând cu modul I și până la modul II, au fost utilizate două tipuri de epruvete SENB, respectiv epruvete cu creștătură verticală și epruvete cu creștătură înclinată, Berto ș.a. (2007):

- epruvetele cu creștătură verticală, în funcție de configurația încărcării, permit obținerea modului I și a modului mixt I+II (cu predominanța modului I). Pentru modul I pur, distanțele la cele două reazeme sunt egale $S_1 = S_2 = 60\text{ mm}$, iar punctul de aplicare a forței este plasat la $m = 0$. Modul mixt I+II se atinge, în diferite combinații, pentru $S_1 = 60\text{ mm}$, $S_2 = 12\text{ mm}$ și $m = -4\text{ mm}$, 4 mm , respectiv 24 mm .

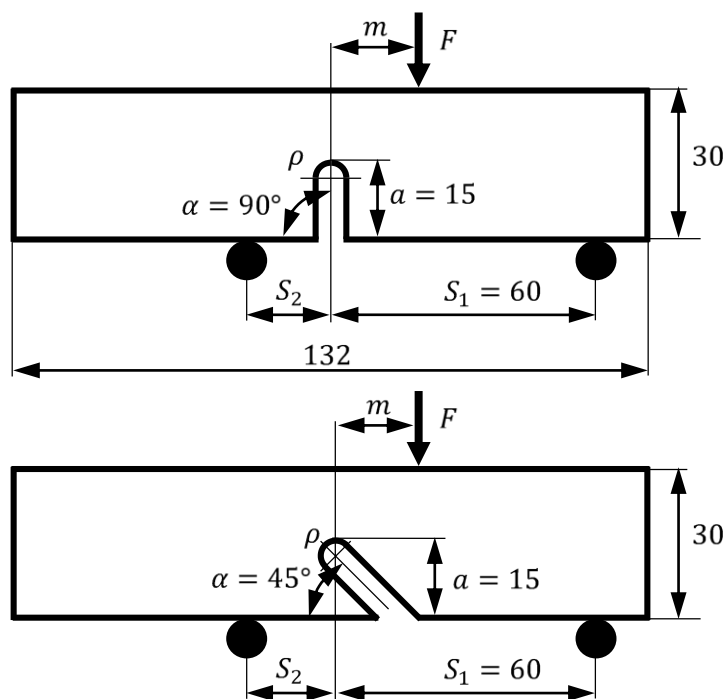


Figura 8.3. Epruvetele SENB, modul mixt (dimensiuni în mm), Rus (2013)

- epruvetele cu creștătură înclinată la 45° au fost testate în două configurații de încărcare. În primul rând, pentru toate cele trei valori diferite ale razei la vârf, s-a utilizat configurația $S_1 = 60\text{ mm}$, $S_2 = 12\text{ mm}$ și $m = 9\text{ mm}$, obținându-se o solicitare în modul mixt, cu predominanța modului II. O a doua configurație, urmărind atingerea unei

solicitări cât mai apropiate de modul II pur, a fost stabilită în funcție de raza de la vârful creștăturii: $S_2 = 7,5 \text{ mm}$ pentru $\rho = 0,75 \text{ mm}$, $S_2 = 8 \text{ mm}$ pentru $\rho = 1 \text{ mm}$, respectiv $S_2 = 9 \text{ mm}$ pentru raza la vârful $\rho = 2 \text{ mm}$. Toate celelalte dimensiuni au fost păstrate constante, după cum urmează: adâncimea creștăturii $a = 15 \text{ mm}$, lungimea epruvetei egală cu 132 mm , secțiunea transversală $30 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$.

Configurațiile de încărcare au fost stabilite *a priori*, din analiza numerică a stării de tensiune de la vârful creștăturii. Factorul M^e , care caracterizează combinația dintre modul I și II, a fost calculat cu relația (7.19), iar factorii NSIF de intensitatea a tensiunii pentru creștătură au fost determinați pe baza relațiilor (6.27) și (6.28) particularizate pentru creștătura U:

$$K_I^u = \sqrt{2\pi r} \frac{(\sigma_\theta)_{\theta=0}}{1 + r_0/r} \quad K_{II}^u = \sqrt{2\pi r} \frac{(\tau_{r\theta})_{\theta=0}}{1 - r_0/r} \quad (8.1)$$

unde $r_0 = \rho/2$. Valorile coeficientului M^e care stabilește combinația modului mixt sunt prezentate în tabelul 8.4, detaliile acestui studiu pot fi consultate în Rus (2013). După cum se observă, pentru fiecare configurație de încărcare a epruvetei, combinația dintre modul I și II depinde de raza de la vârful concentratorului.

Testele au fost efectuate la temperatura ambiantă, pe o mașină universală Zwick/Roell Z005, la o viteză controlată de 1 mm/min .

Rezultatele experimentale, reprezentând forța maximă F_{max} înregistrată, sunt prezentate în tabelul 8.4, iar câteva curbe forță-deplasare sunt ilustrate în figura 8.4.

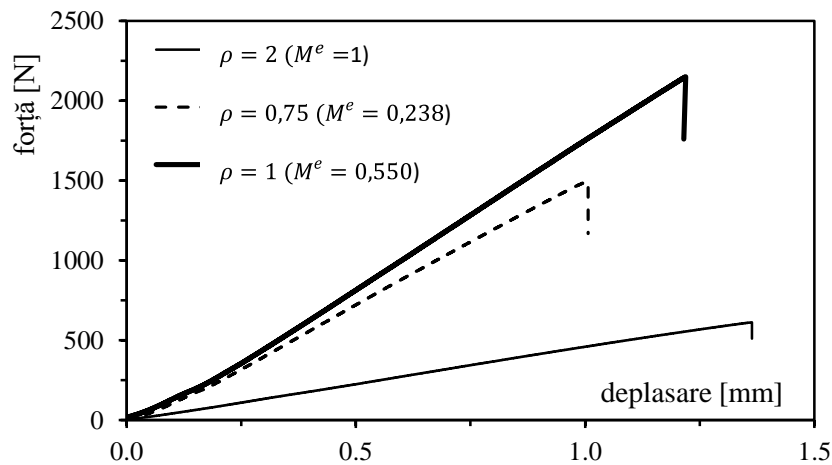


Figura 8.4. Curbele forță-deplasare pentru epruvetele SENB, Rus (2013)

Tabelul 8.4. Geometria și forța maximă pentru epruvetele SENB (valoare medie), Rus (2013)

| ρ (mm) | S_2 (mm) | m (mm) | α (°) | F_{max} (N) | M^e (-) |
|-------------|------------|----------|--------------|---------------|-----------|
| 0,75 | 60 | 0 | 90 | 490,50 | 1,000 |
| | 12 | -4 | 90 | 1985 | 0,870 |
| | 12 | 4 | 90 | 1395 | 0,670 |
| | 12 | 24 | 90 | 2150 | 0,562 |
| | 12 | 9 | 45 | 1465 | 0,238 |
| | 7,5 | 9 | 45 | 2080 | 0,033 |
| 1,00 | 60 | 0 | 90 | 518 | 1,000 |
| | 12 | -4 | 90 | 2120 | 0,871 |
| | 12 | 4 | 90 | 1465 | 0,658 |
| | 12 | 24 | 90 | 2240 | 0,549 |
| | 12 | 9 | 45 | 1550 | 0,216 |
| | 8 | 9 | 45 | 2110 | 0,039 |
| 2,00 | 60 | 0 | 90 | 640 | 1,000 |
| | 12 | -4 | 90 | 2570 | 0,873 |
| | 12 | 4 | 90 | 1860 | 0,616 |
| | 12 | 24 | 90 | 2730 | 0,507 |
| | 12 | 9 | 45 | 1695 | 0,156 |
| | 9 | 9 | 45 | 2165 | 0,027 |

Evaluarea ruperii fragile în modul I de solicitare. Aplicând metoda punctului, în modul I de solicitare, ruperea fragilă se produce la îndeplinirea condiției:

$$\sigma_{\theta} \left(r = \frac{L}{2}; \theta = 0 \right) = \sigma_1 \left(r = \frac{L}{2}; \theta = 0 \right) = \sigma_0 \quad (8.1)$$

În cazul polimerilor, pentru determinarea parametrilor de material, tensiunea critică σ_0 și lungimea caracteristică L , se aplică procedura descrisă în paragraful 7.1.2 și ilustrată în figura 7.2: L și σ_0 sunt coordonatele punctului de intersecție a curbelor care reprezintă distribuțiile tensiunilor elastice în funcție de distanța de la vârful creștăturii, în condițiile de inițiere a ruperii, obținute pentru doi concentratori diferiți. În acest scop, au fost utilizate datele experimentale determinate pentru epruvetele cu creștături în formă de V, respectiv în formă de U (figura 8.1).

Analiza numerică liniar-elastică a câmpului tensiunilor la vârful creștăturii a fost efectuată pentru fiecare epruvetă utilizând software-ul ABAQUS 6.13. Datorită simetriei, a fost modelat doar un sfert de epruvetă impunând condițiile la limită corespunzătoare. Forța maximă înregistrată experimental, în valoare medie, a fost

aplicată pe direcția de tracțiune monoaxială. Pentru discretizare au fost folosite elemente pătratiche de tipul CPS8R plane cu 8 noduri.

Pentru fiecare densitate și fiecare tip de creștătură, au fost trasate curbele tensiune – distanță de-a lungul bisectoarei, pornind din punctul de tensiune maximă, adică vârful concentratorului, în modul I de sollicitare. Coordonatele punctului de intersecție reprezintă parametrii de material L și σ_0 , așa cum se demonstrează în figura 8.5.

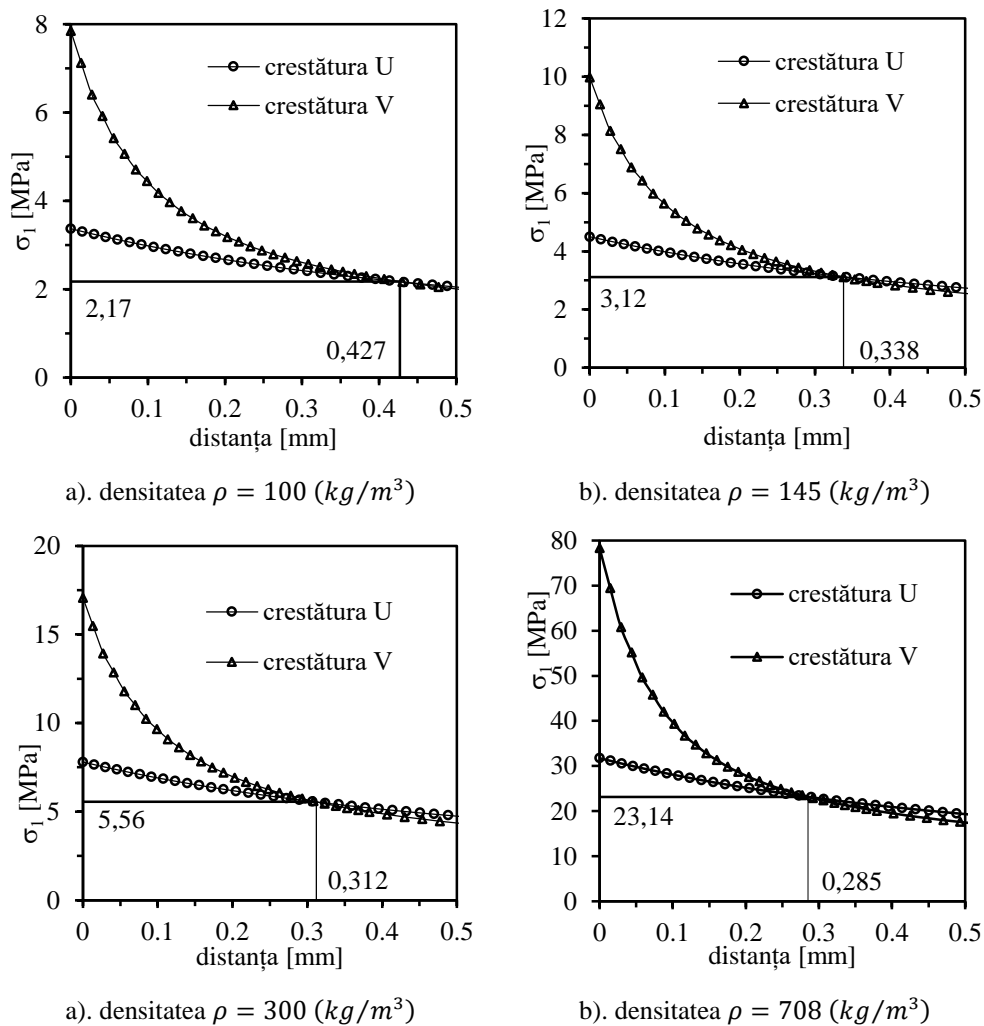
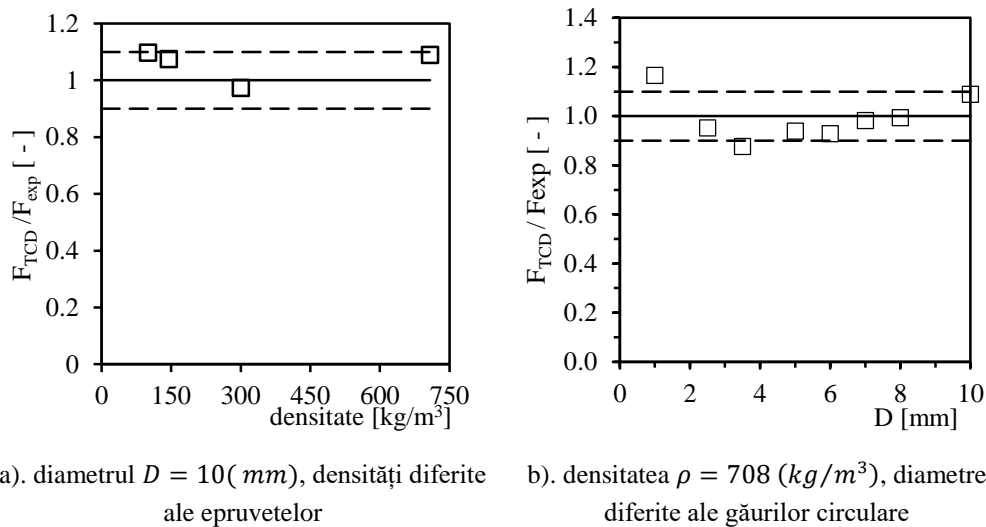


Figura 8.5. Determinarea parametrilor L și σ_0 , Negru ș.a. (2015)

Rezultatele obținute în figura 8.5 au fost utilizate pentru predicția forței de rupere a epruvetelor cu gaură centrală circulară. Astfel, distribuția tensiunii normale σ_1 de-a lungul direcției critice, obținută pentru o valoare a forței egală cu unitatea, se multiplică

până când la distanța critică $L/2$ se atinge tensiunea critică σ_0 , pentru fiecare densitate și valoare a diametrului (analiza tensiunilor este liniar-elastică).

Predicțiile forței de cedare la rupere fragilă sunt prezentate în figura 8.6, comparativ, pentru diametrul de 10 mm și toate densitățile (figura 8.6a), respectiv pentru toate valorile diametrului la densitatea de 708 kg/m^3 . Erorile relative sunt cuprinse în intervalul $\pm 10\%$, o eroare rezonabilă, ținând cont de împrăștierea firească a datelor experimentale. Singura excepție este reprezentată de epruvetele cu diametrul găurii circulare de 1 mm , valoare care are ordinul de mărime al lungimii caracteristice L ($0,57 \div 0,854\text{ mm}$), ceea ce explică erorile relative mai mari. Așa cum subliniază Taylor (2011), atingerea acestui prag reprezintă o situație limită în aplicarea TCD.



a). diametrul $D = 10\text{ (mm)}$, densități diferite ale epruvetelor b). densitatea $\rho = 708\text{ (kg/m}^3\text{)}$, diametre diferite ale găurilor circulare

Figura 8.6. Forța de rupere estimată cu TCD, Negru ș.a. (2015)

Evaluarea ruperii fragile în modul mixt I+II de solicitare. În modul mixt I+II de solicitare, în cazul concentratorilor nesingulari (rotunjiți la vârf), punctul de tensiune principală maximă σ_1 nu este situat la vârful concentratorului. În aceste probleme, evaluarea tensiunii se face de-a lungul normalei la suprafața creștăturii, direcție perpendiculară pe tensiunea principală maximă.

Două ipoteze, formulate de Susmel și Taylor (2008), sunt acceptate în estimarea ruperii fragile în modul mixt I+II a epruvetelor SENB cu creștătură U:

a). tensiunea critică σ_0 nu depinde de multiaxialitatea câmpului tensiunilor de la vârful creștăturii, astfel încât, la evaluarea ruperii fragile se utilizează valoarea tensiunii critice σ_0 determinată pentru modul I;

b). lungimea caracteristică L se modifică cu gradul de multiaxialitate al câmpului tensiunilor de la vârful concentratorului, după relația propusă de Negru ș.a. (2015)

$$L(M^e) = A \cdot M^e + B \quad (8.2)$$

Constantele A și B din ecuația (8.2) s-au determinat pentru două cazuri limită, modul I și modul II de solicitare, pe baza rezultatelor experimentale obținute pe epruvete SENB cu raza la vârf de 2 mm (tabelul 8.4) și epruvete ASCB cu fisură (epruvete semi-disc încărcate la încovoiere asimetrică), utilizate la evaluarea tenacității materialelor poliuretanică de Negru ș.a. (2013), Marșavina ș.a. (2014b). La epruvetele ASCB cu fisură, pentru modelarea singularității câmpului tensiunilor s-au utilizat elemente finite singulare la vârful acesteia, iar direcția critică s-a determinat analitic, în modul mixt.

Procedura de determinare a parametrilor TCD în modul I, respectiv modul II, de solicitare este ilustrată în figura 8.7. Se reține că, în modul I de solicitare, distanța critică este $L/2 = 0,148 \text{ mm}$, iar tensiunea critică $\sigma_0 = 98,9 \text{ (MPa)}$. În modul II de solicitare, distanța critică determinată este mai mică, $L/2 = 0,093 \text{ mm}$, în timp ce, tensiunea critică $\sigma_0 = 102,9 \text{ (MPa)}$ este de aproape aceeași valoare.

Cu aceste rezultate, ecuația (8.2) se utilizează în forma:

$$L(M^e) = 0,110 \cdot M^e + 0,186 \quad (8.3)$$

tensiunea critică reținută fiind egală cu $102,9 \text{ (MPa)}$.

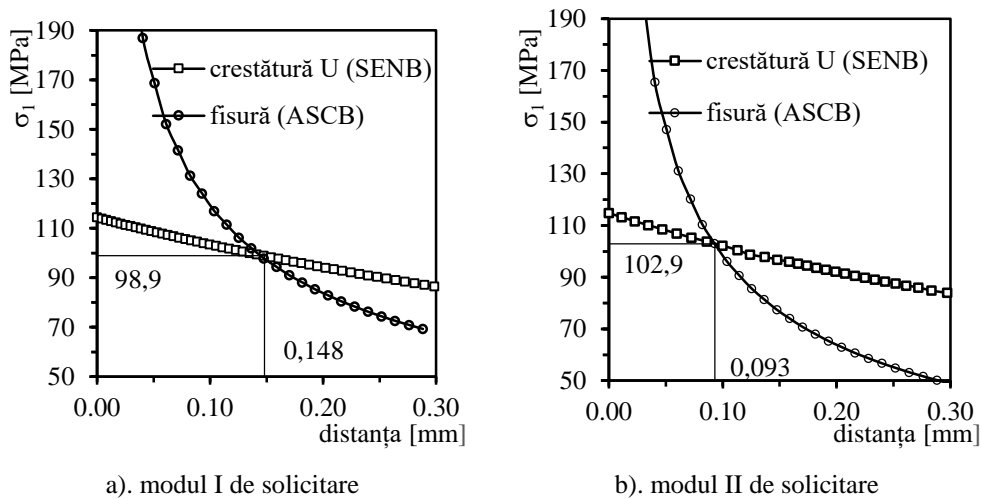


Figura 8.7. Determinarea parametrilor TCD la densitatea de $1218 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, Negru ș.a. (2015)

Predicțiile forței de cedare la rupere fragilă sunt prezentate în figura 8.8, erorile relative fiind cuprinse în intervalul $\pm 15\%$, o eroare rezonabilă, ținând cont de împrăștierea firească a datelor experimentale.

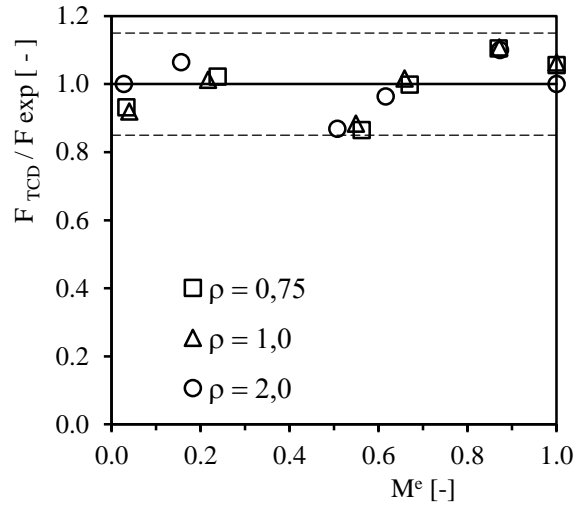
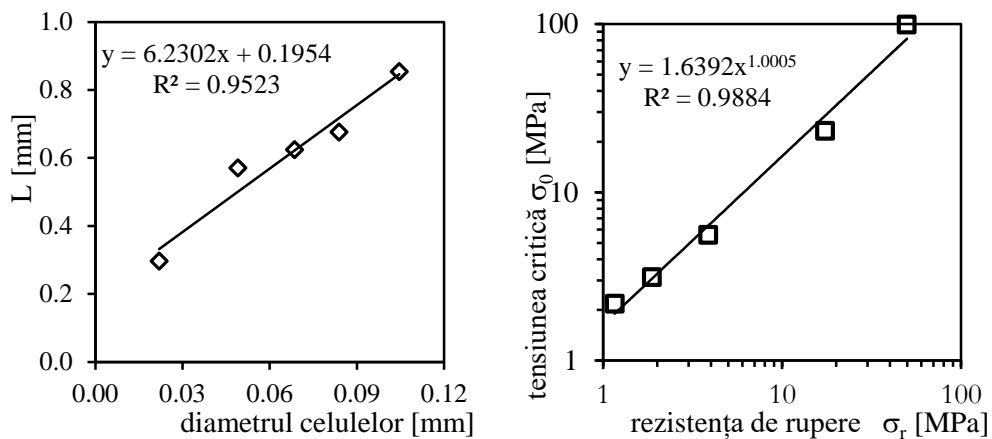


Figura 8.8. Forța de rupere estimată cu TCD pentru epruvetele SENB cu creștătură U, densitatea 1218 (kg/m^3) Negru ș.a. (2015)

Rezultatele obținute pentru parametrii de material la densitățile studiate sunt ilustrate grafic în figura 8.9. Lungimea caracteristică L prezintă o dependență liniară cu diametrul celulelor materialului, tensiunea critică σ_0 având o variație “aproape” liniară cu rezistența de rupere. Aceste rezultate facilitează determinarea parametrilor de material L și σ_0 pentru diferite densități ale poliuretanului, fără experimente suplimentare.



- a). Variația lungimii caracteristice L în funcție de diametrul celulelor
 b). Variația tensiunii critice σ_0 în funcție de rezistența de rupere la tracțiune σ_r

Figura 8.9. Forța de rupere estimată cu TCD, Negru ș.a. (2015)

8.1.2. Aplicarea ASED la ruperea fragilă a epruvetelor de tip disc cu creștătură U solicitate în modul mixt I+II

Poliuretanul cu densitatea de $708 \text{ (kg/m}^3\text{)}$, produs de Necumer GmbH Germania sub denumirea comercială de Necuron 651, a fost utilizat pentru a investiga ruperea fragilă pe baza criteriului ASED (criteriul valorii medii a energiei specifice de deformare, paragraful 7.2). Pe lângă caracteristicile elastice și mecanice prezentate în tabelul 8.1, s-au mai determinat: tenacitatea $K_I = 0,996 \text{ (MPa} \cdot \text{m}^{0,5}\text{)}$ pe epruvete SENB cu grosimea de 5 (mm) , egală cu grosimea epruvetelor de tip disc, și rezistența de rupere la tracțiune $\sigma_n = 34,9 \text{ (MPa)}$ pe epruvete cu degajări laterale semi-circulare.

Rezultate experimentale. Epruveta semi-disc solicitată la compresiune pe direcția diametrului (*diametrically compressed ring DCR*) a fost utilizată pentru a determina tenacitatea la rupere în modul I pentru roci poroase de către Shiryaev și Kotkis (1982) și pentru oțeluri de mare rezistență, El Minor ș.a. (2003). Investigarea modului mixt I+II de solicitare, folosind epruvete din granit, a fost abordată de Aliha ș.a. (2008).

Pentru unghiul $\alpha = 0^\circ$ se obține modul I de solicitare, iar o înclinare a creștăturii față de direcția diametrală de compresiune, adică $\alpha \neq 0^\circ$, asigură o solicitare în modul mixt I+II, combinația dintre cele două moduri fiind caracterizată prin coeficientul M^e , figura 8.10.

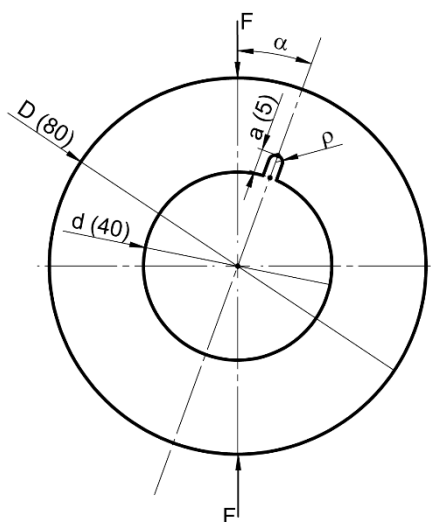


Figura 8.10. Epruveta DCR cu creștătură U (dimensiunile sunt date în mm), Negru ș.a. (2018)

Astfel, modificând unghiul α de la 0° până la o valoare aproximativ egală cu 33° , se atinge întreaga gamă de combinații în modul mixt I+II. Valoarea unghiului α pentru

care se obține o solicitare în modul II pur, depinde de geometria epruvetei și raza ρ de la vârful creștăturii. În studiul prezentat, epruvetele DCR au fost comprimate diametral pe direcțiile caracterizate de unghiul $\alpha = 0^\circ, 15^\circ$ și 25° .

Testele au fost efectuate la temperatura ambiantă, pe o mașină universală Zwick/Roell Z005, la o viteză controlată de $1\text{ mm}/\text{min}$. Pentru a investiga influența concentratorului, au fost utilizate epruvete cu trei raze ρ diferite la vârful creștăturii, și anume $0,5\text{ mm}, 1\text{ mm}$ și $1,5\text{ mm}$. Au fost menținute constante adâncimea creștăturii și dimensiunile celor două diametre, interior și exterior. Grosimea epruvetelor a fost pentru toate testele constantă și egală cu 5 mm , fiind testate câte trei epruvete pentru fiecare configurație a solicitării. În figura 8.11 sunt prezentate traiectoriile fisurilor pentru trei configurații diferite, iar valorile medii ale forței maxime înregistrate sunt listate în tabelul 8.5.

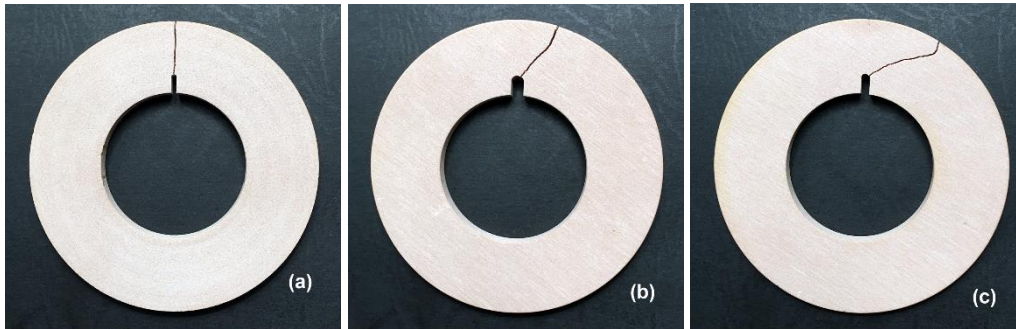


Figura 8.11. Propagarea fisurii la ruperea fragilă a epruvetelor DCR: a). $\alpha = 0^\circ, \rho = 0,5\text{ mm}$; b). $\alpha = 15^\circ, \rho = 1,5\text{ mm}$; c). $\alpha = 25^\circ, \rho = 1\text{ mm}$, Negru ș.a. (2018)

Tabelul 8.5. Forța maximă pentru epruvetele DCR (valoare medie), Negru ș.a. (2018)

| α | $F_{max} (N)$ | | |
|------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| | $\rho = 0,5 (mm)$ | $\rho = 1,0 (mm)$ | $\rho = 1,5 (mm)$ |
| 0° | 410,93 | 439,27 | 473,17 |
| 15° | 464,82 | 488,34 | 533,93 |
| 25° | 643,68 | 673,11 | 692,75 |

Curbele forță-deplasare, ilustrate în figura 8.12, prezintă o dependență liniară, cu scăderea bruscă a forței după atingerea nivelului maxim, cedarea producându-se prin rupere fragilă.

Parametrii de material necesari pentru aplicarea criteriului ASED s-au calculat cu relațiile (7.21) și (7.38), utilizând rezistența de rupere σ_n determinată pe concentratorii semicirculari drept tensiune critică σ_c , după cum recomandă Seweryn (1994). Valorile critice ale parametrilor ASED sunt: $R_c = 0,265\text{ mm}$ și $W_c = 0,489\text{ MJ}/\text{m}^3$.

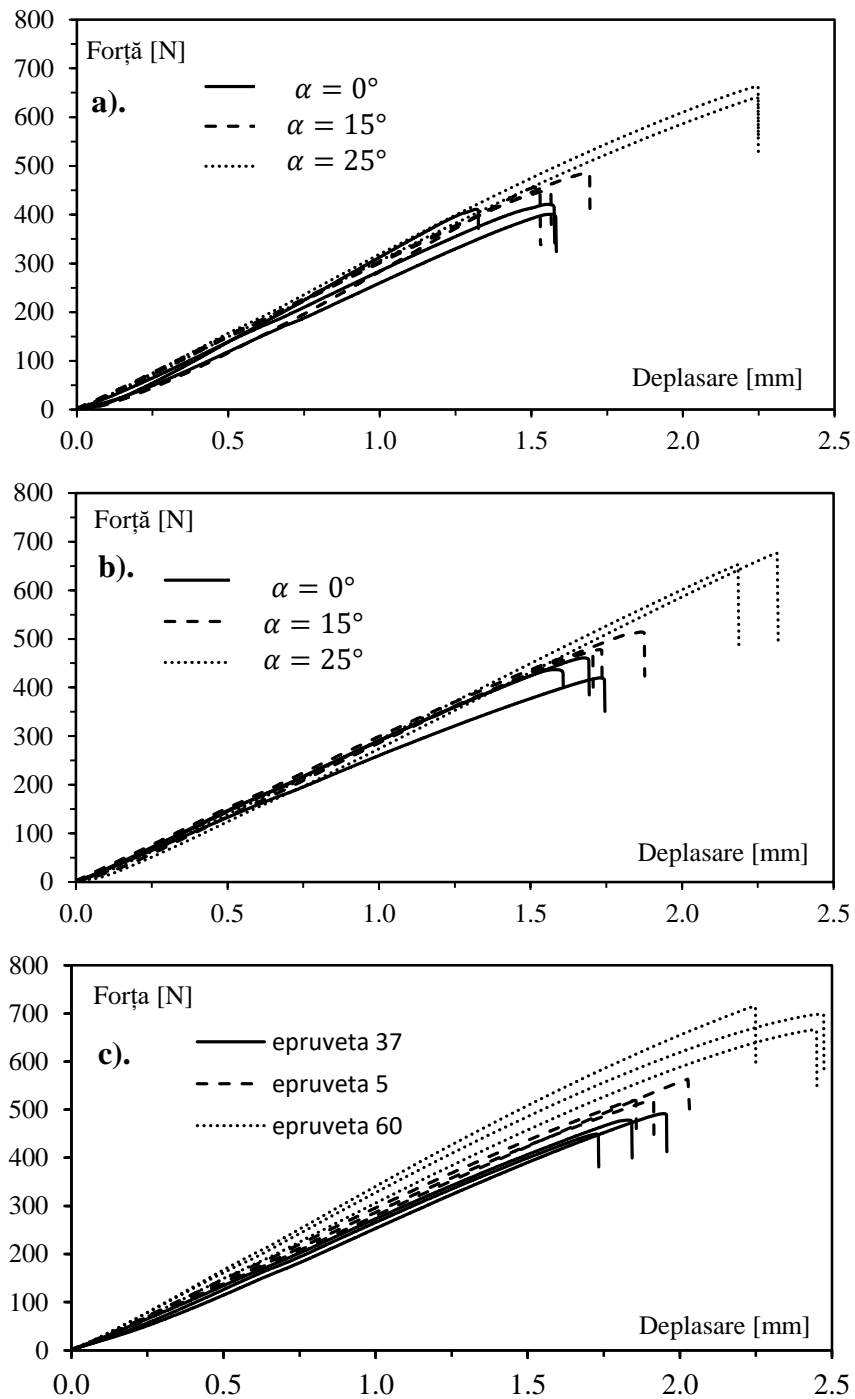


Figura 8.12. Curbele forță-deplasare pentru epruvetele DCR: a). $\rho = 0,5 \text{ mm}$; b). $\rho = 1 \text{ mm}$; c). $\rho = 1,5 \text{ mm}$, densitate 708 kg/m^3 , Negru ș.a. (2018)

Evaluarea ruperii fragile în modul mixt I+II de solicitare. Pentru analizele numerice cu metoda elementului finit, în ipoteza stării plane de tensiune și a unui comportament liniar-elastic, s-a utilizat software-ul Abaqus 6.14. Discretizarea s-a efectuat cu elemente pătratice CPS8R cu 8 noduri, urmărindu-se rafinarea rețelei de elemente finite în zona de la vârful creștăturii. Valorile unghiului φ care determină poziția punctului caracterizat de maximumul tensiunii principale σ_1 , punctul P în figura 7.8b, sunt date în tabelul 8.6.

Factorul M^e , care caracterizează combinația dintre modul I și II, a fost calculat cu relația (7.19), iar factorii NSIF de intensitatea a tensiunii pentru creștătură au fost determinați pe baza relațiilor (8.1). Valorile coeficientului M^e și ale factorilor de intensitate a tensiunii K_I^u , K_{II}^u pentru creștătura U sunt listați în tabelul 8.6, dovedind o dependență clară cu raza ρ de la vârful concentratorului.

Tabelul 8.6. Forța maximă pentru epruvetele DCR (valoare medie), Negru ș.a. (2018)

| α | | $\rho = 0,5 \text{ (mm)}$ | $\rho = 1 \text{ (mm)}$ | $\rho = 1,5 \text{ (mm)}$ |
|------------|------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 0° | K_I^u | 1,147 | 1,234 | 1,330 |
| | K_{II}^u | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| | M^e | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| | φ | 0,000 | 0,000 | 0,000 |
| 15° | K_I^u | 0,852 | 0,893 | 0,855 |
| | K_{II}^u | 0,792 | 0,979 | 1,137 |
| | M^e | 0,523 | 0,471 | 0,410 |
| | φ | 33,94 | 32,95 | 32,50 |
| 25° | K_I^u | 0,508 | 0,507 | 0,504 |
| | K_{II}^u | 1,097 | 1,424 | 1,676 |
| | M^e | 0,275 | 0,218 | 0,187 |
| | φ | 48,03 | 47,02 | 45,50 |

La aplicarea criteriului ASED suprafața de control în formă de semilună, reprezentată în figura 7.8b, s-a discretizat cu elemente finite pătratice triunghiulare de tipul CPS6M. Pentru creștătura cu raza de la vârf $\rho = 1,5 \text{ mm}$ și configurația de încărcare dată prin unghiul $\alpha = 25^\circ$, valoarea critică $W_c = 0,489 \text{ MJ/m}^3$ este atinsă la

forța aplicată $F_{SED} = 794,30 N$, care reprezintă predicția forței de cedare prin rupere fragilă pe baza criteriului ASED (figura 8.13).

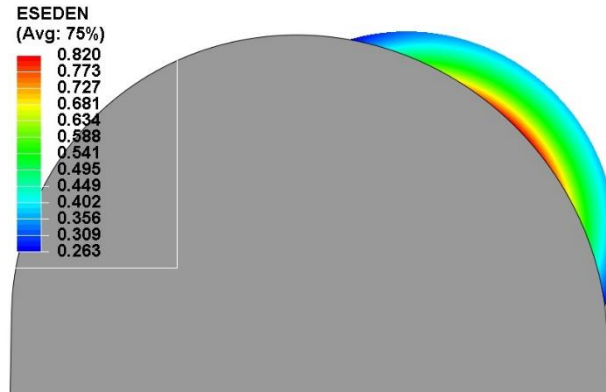


Figura 8.13. Distribuția energiei specifice de deformare la vârful creștăturii ($\rho = 1,5 \text{ mm}$ și $\alpha = 25^\circ$), Negru ș.a. (2018)

Predicțiile forței maxime de cedare F_{SED} și eroarea relativă $e(\%)$ sunt redată în tabelul 8.7.

Tabelul 8.7. Forța maximă pentru epruvetele DCR (valoare medie), Negru ș.a. (2018)

| α | | $\rho = 0,5 \text{ (mm)}$ | $\rho = 1 \text{ (mm)}$ | $\rho = 1,5 \text{ (mm)}$ |
|------------|---------------|---------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 0° | $F_{exp} (N)$ | 410,9 | 439,3 | 473,2 |
| | $F_{SED} (N)$ | 411 | 457 | 502,3 |
| | $e(\%)$ | 0,02 | 4,04 | 6,16 |
| 15° | $F_{exp} (N)$ | 464,8 | 488,3 | 533,9 |
| | $F_{SED} (N)$ | 478,9 | 538,75 | 580,4 |
| | $e(\%)$ | 3,03 | 10,32 | 8,70 |
| 25° | $F_{exp} (N)$ | 643,7 | 673,1 | 692,7 |
| | $F_{SED} (N)$ | 743,35 | 767,15 | 794,3 |
| | $e(\%)$ | 15,48 | 13,97 | 14,66 |

În concluzie, criteriul ASED supraestimează valoarea forței de cedare, pentru modul I și modul mixt I+II, la predominanța modului I, erorile relative fiind cuprinse în intervalul 0 – 10%. La predominanța modului II de solicitare, $\alpha = 25^\circ$, erorile relative sunt de aproximativ 15%, justificate de faptul că abordarea se bazează pe conceptul modului I echivalent (*equivalent local mode I concept*), Campagnolo ș.a. (2016).

8.2. Estimarea rezistenței la oboseală în domeniul durabilităților medii în prezența concentratorilor de tensiune

Abordările prezentate în capitolul 7 (TCD, ASED, metoda volumetrică, CMM) sunt metode cu mare aplicabilitate practică în evaluarea rezistenței la oboseală. În multe probleme ingineresti, aceste metode facilitează depășirea unor dificultăți specifice abordărilor clasice legate de geometria complexă a pieselor, de exemplu, definirea tensiunii nominale și calculul NSIF.

8.2.1. Rezultate experimentale

Încercările la oboseală în domeniul durabilităților medii (*medium-cycle fatigue regime*) au fost efectuate pentru trei tipuri de concentratori de tensiune: creștătură laterală semicirculară și creștătură laterală în V cu raza la vârf $\rho = 0,5 \text{ mm}$, respectiv $\rho = 0,2 \text{ mm}$, adâncimea creștăturii fiind păstrată constantă, figura 8.14.

Epruvetele au fost confecționate din aliajul de aluminiu 2024-T3 prin frezare CNC (creștătura semicirculară), respectiv electroeroziune cu fir (creștăturile în V). Caracteristicile elastice și mecanice ale aliajului 2024-T3, determinate în regim static, sunt date în tabelul 8.8.

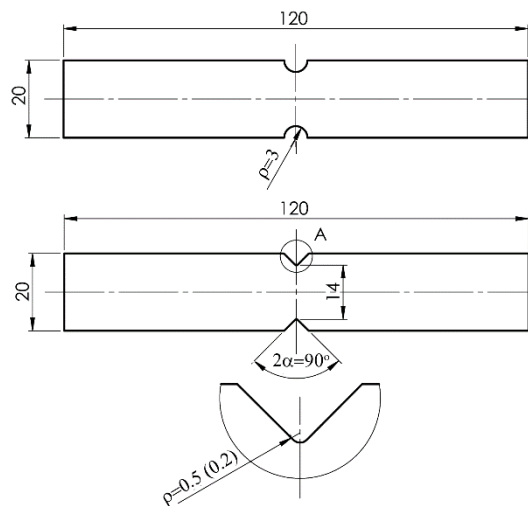


Figura 8.14. Geometria epruvetelor, Negru ș.a. (2016)

Încercările la oboseală s-au realizat la întindere monoaxială cu amplitudine constantă, un coeficient de asimetrie $R = 0,5$ și frecvența egală cu $20(\text{Hz})$, pe o mașină

universală Walter+bai de 10 kN pentru încercări statice și variabile, în modul de forță controlată, Negru (2009).

Tabelul 8.8. Proprietățile statice ale aliajului de aluminiu 2024-T3, Negru ș.a. (2016)

| E (MPa) | ν (-) | σ_r (MPa) | σ_c (MPa) | A (%) |
|-----------|-----------|------------------|------------------|---------|
| 70300 | 0,33 | 465 | 345 | 17,02 |

Coeficientul teoretic net de concentrare a tensiunilor K_t s-a calculat pentru fiecare tip de epruvetă prin analiză cu elemente finite (tabelul 8.9).

Tabelul 8.9. Rezultatele încercărilor la oboseală prin întindere monoaxială, Negru ș.a. (2016)

| Epruvete | R (-) | K_t (-) | $\sigma_{a\ net}$ (MPa) ($P_S = 50\%$) | k (-) | T_σ (-) |
|--|---------|-----------|---|---------|----------------|
| crestătură semicirculară, $\rho = 3\text{mm}$ | 0,5 | 2,134 | 32,64 | 6,452 | 1,170 |
| crestătură V, $\rho = 0,5\text{mm}$ | 0,5 | 4,362 | 21,27 | 4,630 | 1,258 |
| crestătură V, $\rho = 0,2\text{mm}$ | 0,5 | 6,509 | 16,21 | 3,831 | 1,472 |
| epruvete netede* | -1 | - | 161,47 | 5,441 | 1,873 |
| epruvete netede** | 0,5 | - | 80,14 | 13,333 | - |

*Illg (1956); **estimare la $R = 0,5$ pe baza ecuației Goodman.

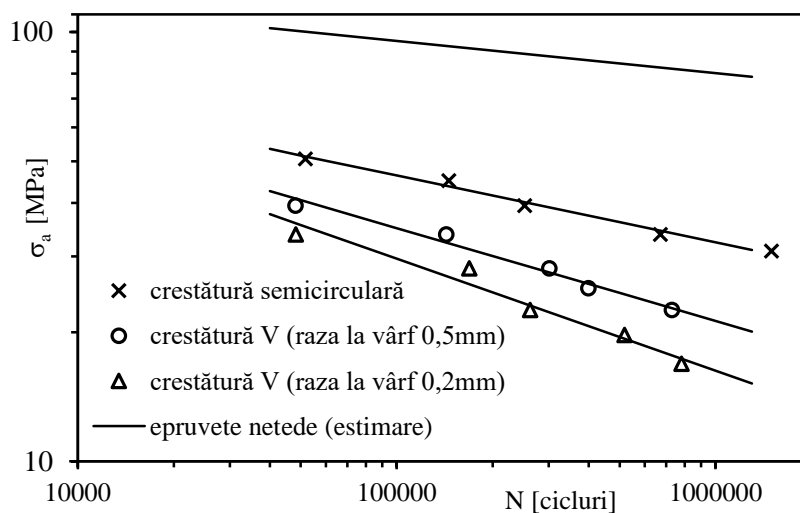


Figura 8.15. Curbele de durabilitate $S - N$ la întindere monoaxială, Negru ș.a. (2016)

Rezultatele încercărilor la oboseală sunt prezentate în tabelul 8.9, unde amplitudinea tensiunii σ_a este calculată în secțiunea transversală netă pentru o durată de viață egală cu 10^6 cicluri de solicitare, k reprezintă inversa pantei luată cu semn

schimbat, iar T_σ este indicele de împrăștiere, calculat pentru $\pm 3 \times SD$ (abaterea standard SD). Curbele de durabilitate $S - N$ sunt reprezentate în figura 8.15 pentru 50% probabilitate de supraviețuire.

Curba de durabilitate $S - N$ pentru epruvete netede și coeficientul de asimetrie $R = 0,5$ este estimată pe baza ecuației lui Goodman, pentru a ține cont de efectul tensiunii medii:

$$\sigma_{-1} = \frac{\sigma_a}{1 - \frac{\sigma_{med}}{\sigma_r}} \quad (8.4)$$

Datele experimentale pentru sollicitarea de tracțiune alternant-simetrică sunt preluate din literatura tehnică, Illg (1956).

8.2.2. Aplicarea TCD în domeniul durabilităților medii

Determinarea lungimii caracteristice L cu relația (7.13) implică cunoașterea rezistenței la oboseală $\Delta\sigma_0$ și a valorii de prag a variației factorului de intensitate a tensiunii ΔK_{th} , obținute pentru același coeficient de asimetrie R . Cu referire la domeniul durabilităților medii, între 40000 și 10^6 cicluri, Susmel și Taylor (2007) au introdus lungimea caracteristică L în funcție de numărul de cicluri N_f până la cedare prin relația:

$$L(N_f) = A \cdot N_f^B \quad (8.5)$$

O strategie pentru determinarea coeficienților A și B din ecuația (8.5) a fost propusă de Susmel și Taylor (2007). Aplicarea acesteia presupune cunoașterea curbelor de durabilitate $S-N$ pentru două tipuri de epruvete: epruvete standard (fără concentratori de tensiune) și epruvete cu un concentrator de o geometrie cunoscută. Astfel, utilizând o analiză cu elemente finite, se obține câmpul tensiunilor elastice $\Delta\sigma_\theta$ în zona de la vârful creștăturii, pentru o variație a tensiunii aplicate egală cu rezistența la oboseală $\Delta\sigma_{0n}$ a epruvetelor cu concentratori de tensiune. Punctul în care orizontala, corespunzătoare rezistenței la oboseală $\Delta\sigma_0$ a epruvetelor netede, intersectează curba $\Delta\sigma$ -distanță determină distanța critică $L/2$, conform metodei punctului. Dacă procedeul se aplică pentru două durate de viață N_i diferite, se obțin două seturi de valori (L_i , N_i) care permit determinarea coeficienților A și B .

Această strategie este redată grafic în figura 8.16 pentru epruvetele cu creștătură V ($\rho = 0,2 \text{ mm}$) și epruvetele netede (curba de durabilitate $S - N$ estimată), pentru o durată de viață egală cu $4 \cdot 10^4$ și 10^6 cicluri până la cedare. La întindere monoaxială,

variația tensiunii este reprezentată de-a lungul bisectoarei, fiind exprimată prin variația tensiunii normale principale, adică $\Delta\sigma_1$.

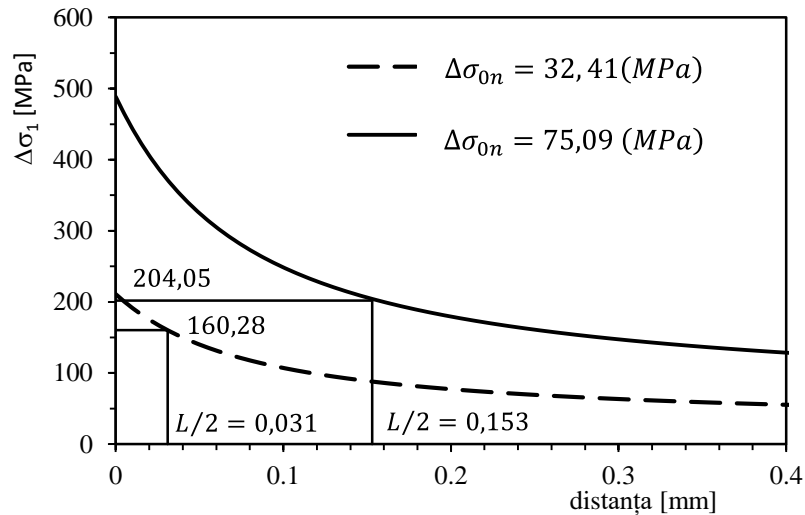


Figura 8.16. Aplicarea TCD la determinarea lungimii caracteristice $L(N_f)$, Negru ș.a. (2016)
Astfel, se obține relația dintre lungimea critică și numărul de cicluri până la cedare:

$$L(N_f) = 75,30 \cdot N_f^{-0,514} \quad (8.6)$$

În continuare, curbele de durabilitate $S - N$ au fost estimate pentru celelalte două tipuri de creștături, urmând procedeul iterativ propus de Susmel și Taylor (2007) formulat în metoda punctului.

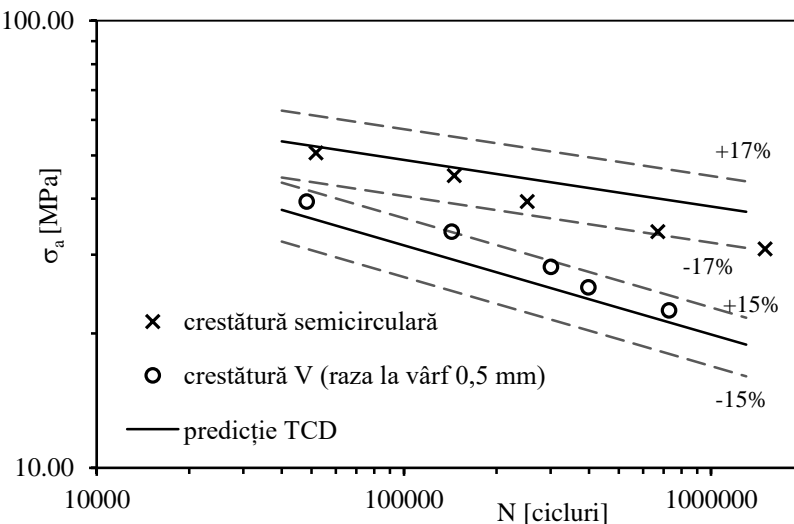


Figura 8.17. Curbele de durabilitate estimate cu TCD, Negru ș.a. (2016)

Predicțiile sunt ilustrate în figura 8.17, sub forma curbelor de durabilitate $S - N$ pentru 50% probabilitate de supraviețuire, alături de rezultatele experimentale. Pentru creștătura semicirculară, TCD supraestimează rezistența la oboseală, rezultatele experimentale fiind plasate în intervalul $-17 \div 0\%$ față de curba de durabilitate estimată. În schimb, pentru creștătura V, TCD subestimează rezistența la oboseală, rezultatele experimentale fiind plasate în intervalul $0 \div 15\%$.

8.2.3. Evaluarea rezistenței la oboseală după criteriul ASED

În modul I de solicitare, dacă se neglijează efectul razei de la vârful creștăturii, adică se consideră $\rho = 0 \text{ mm}$, relația (7.62) care exprimă valoarea medie a energiei specifice de deformație $\overline{\Delta W}$ se simplifică:

$$\Delta \overline{W} = \frac{c_w \times e_1}{E} \left(\frac{\Delta K_I^V}{R_c^{1-\lambda_1}} \right)^2 \quad (8.7)$$

unde coeficientul care ține cont de asimetria ciclului de solicitare este $c_w = 3$, pentru $R = 0,5$, relația (7.61).

Raza de control R_c din expresia (8.7) a energiei specifice de deformație se estimează din relația (7.64), astfel:

$$R_1 = \left(\frac{\sqrt{2e_1} \times \Delta K_{IA}^V}{\Delta \sigma_{IA}} \right)^{1/1-\lambda_1} \quad (8.8)$$

unde rezistența la oboseală a epruvetelor netede $\Delta \sigma_A = 152,16 \text{ MPa}$ și variația NSIF pentru creștătura V cu raza de la vârful $\rho = 0,2 \text{ mm}$ sunt evaluate la durata de viață $N_A = 2 \cdot 10^6$ cicluri de solicitare. Exponentul din ecuația (8.8), pentru deschiderea unghiulară $2\alpha = 90^\circ$, devine $1 - \lambda_1 = 0,455$. Pentru starea plană de tensiune parametrul $e_1 = 0,1703$, astfel că se obține valoarea razei de control $R_c = 0,059 \text{ mm}$.

Rezultatele la oboseală în formularea ASED, pentru creștăturile V rotunjite la vârf, sunt prezentate în figura 8.18. Curba de durabilitate $c_w \times \Delta \overline{W} - N$, pentru 50% probabilitate de supraviețuire, are inversa pantei luată cu semn schimbat $k = 1,706$ și indicele de împrăștiere $T_w = 3,017$, calculat pentru $\pm 2 \times SD$. Împrăștierea ridicată nu este deloc surprinzătoare, cât timp efectul razei de la vârful concentratorului a fost neglijat iar energia de deformație este proporțională cu pătratul tensiunilor. Variația energiei specifice de deformație $c_w \times \Delta \overline{W}$, la 10^6 cicluri de solicitare, este egală cu $0,800 \text{ MJ/m}^3$.

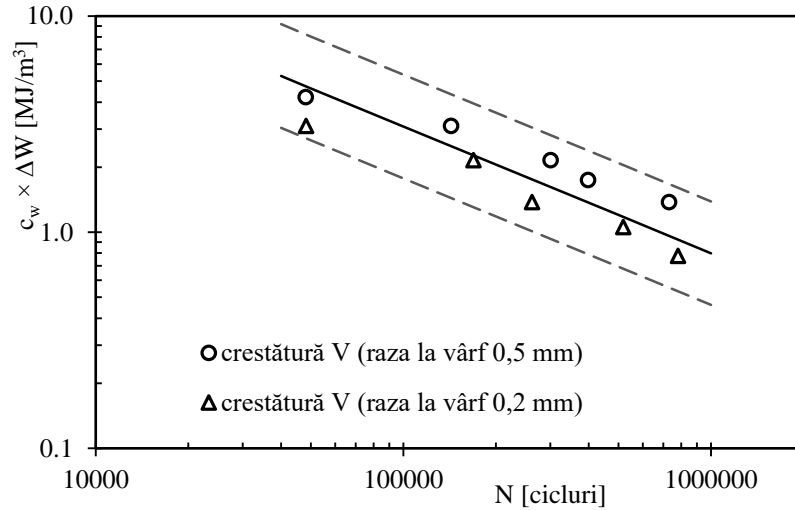


Figura 8.18. Curba de durabilitate $c_w \times \Delta\bar{W} - N$ (efectul razei de la vârful creștăturii este neglijat), Negru ș.a. (2016)

În continuare, curba de oboseală $c_w \times \Delta\bar{W} - N$ este reconsiderată ținând cont de efectul razei de racordare de la vârful creștăturilor, analiza ASSED fiind efectuată pe volumul în formă de semilună prezentat în figura 7.7.

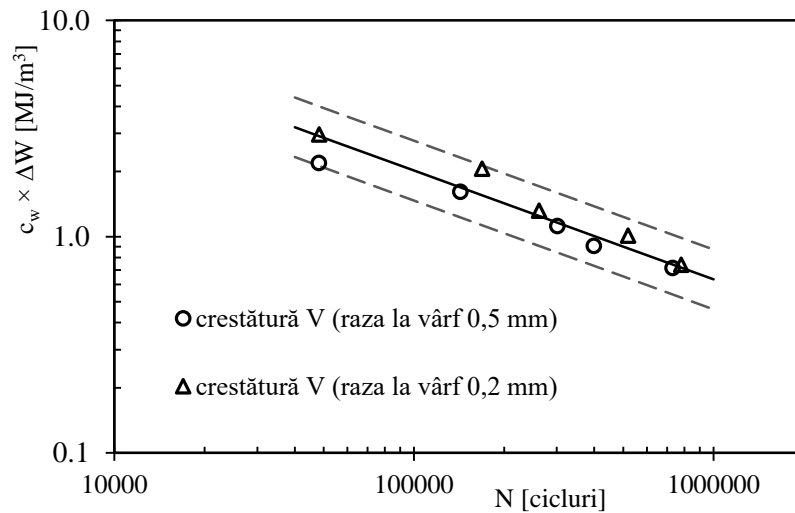


Figura 8.19. Curba de durabilitate $c_w \times \Delta\bar{W} - N$, dacă se ține cont de efectul razei de la vârful creștăturii, Negru ș.a. (2016)

Cu acest scop, R_c a fost determinată ca raza volumului de control corespunzătoare unei valori a SED medie egală cu cea corespunzătoare epruvetelor netede pentru o durată de

viață $N_A = 2 \cdot 10^6$ cicluri de solicitare, rezultând valoarea $R_c = 0,030 \text{ mm}$. Curba de durabilitate $c_w \times \Delta \bar{W} - N$, pentru 50% probabilitate de supraviețuire, are inversa pantei luată cu semn schimbat $k = 1,984$ și indicele de împrăștiere mai redus, $T_w = 1,889$, calculat pentru $\pm 2 \times SD$. Variația energiei specifice de deformare $c_w \times \Delta \bar{W}$, la 10^6 cicluri de solicitare, este egală cu $0,630 \text{ MJ/m}^3$, cu aproximativ 20% mai mică.

8.2.4. Evaluarea rezistenței la oboseală cu metoda volumetrică

La solicitări variabile, atunci când limita de curgere este depășită, comportamentul elasto-plastic al materialului este considerat de metoda volumetrică. Analiza câmpului tensiunilor elasto-plastice la vârful concentratorilor s-a efectuat utilizând modelul de plasticitate Ramberg-Osgood implementat de software-ul Abaqus 6.13 (2013).

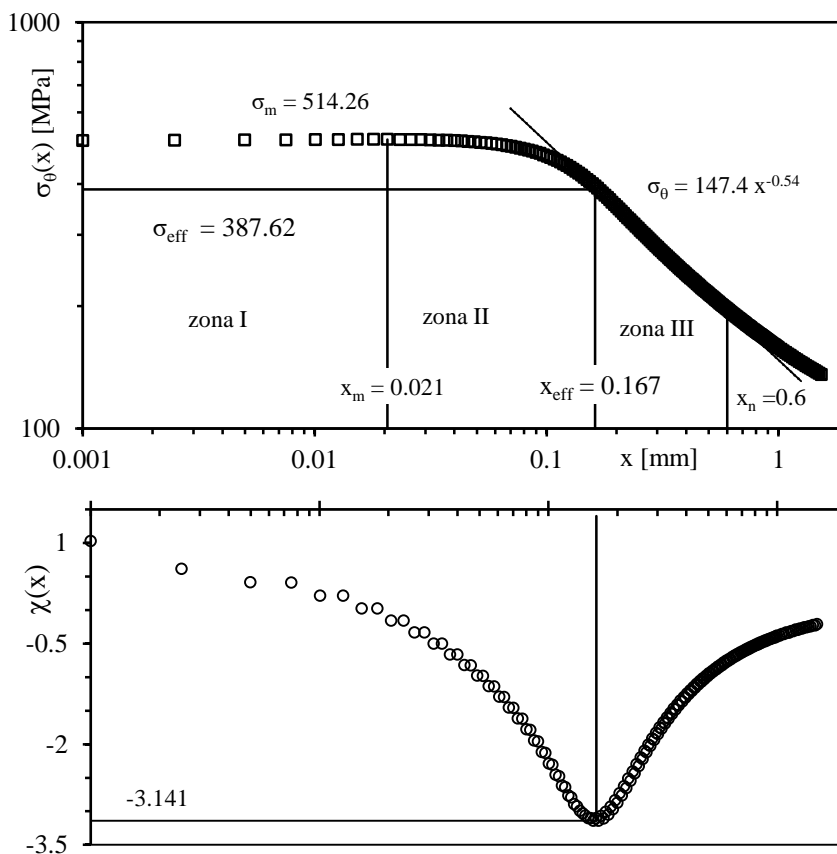


Figura 8.20. Distribuția tensiunii σ_θ și a gradientului relativ al tensiunii χ , creștătură V cu raza la de vârf $\rho = 0,2 \text{ mm}$, $\sigma_{max} = 94,60 \text{ MPa}$ și $k_f = 2,868$, Negru ș.a. (2016)

Proprietățile mecanice publicate de Boller și Seeger (1998) pentru aliajul 2024-T3 au fost utilizate în analizele numerice: coeficientul de ecrusare ciclic $n' = 0,109$ și coeficientul de rezistență ciclic $K' = 843 \text{ MPa}$. De efectul tensiunii medii s-a ținut cont aplicând, în secțiunea brută a epruvetei, o tensiune de întindere egală cu tensiunea maximă σ_{max} a ciclului de solicitare.

Pentru calculul parametrilor metodei volumetrice (vezi paragraful 7.4) Adib-Ramezani și Jeong (2007) au propus ca rezultatele discrete obținute prin analiza numerică cu metoda elementului finit să fie utilizate în calcule în forma unei funcții polinomiale continuă și derivabilă. Urmând această abordare, o funcție polinomială de gradul patru a fost utilizată pentru a exprima tensiunea σ_θ , pe domeniul de integrare delimitat superior de X_{eff} :

$$\sigma_\theta(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i \quad (8.9)$$

unde a_i sunt coeficienții polinomiali, iar x este distanța de la vârful creștăturii măsurată de-a lungul bisectoarei.

Distribuția tensiunilor elasto-plastice $\sigma_\theta(x)$ și a gradientului relativ al tensiunii $\chi(x)$ este redată în figura 8.20 (în coordonate dublu-logaritmice) pentru creștătura V cu raza de la vârf $\rho = 0,2 \text{ mm}$ și nivelul solicitării dat prin tensiunea maximă $\sigma_{max} = 94,60 \text{ MPa}$. Se observă distinct, pe curba tensiune-distanță cele trei zone caracteristice metodei volumetrice:

- zona I definită prin tensiunea maximă σ_m de la vârful creștăturii și distanța x_m ;
- zona II de tranziție, caracterizată prin scăderea tensiunii până la valoarea efectivă σ_{eff} ;
- zona III caracterizată prin pseudo-singularitatea tensiunii elasto-plastice σ_θ , astfel

$$\sigma_\theta(x) = 147,4 \cdot x^{-0,54} \quad (8.10)$$

Forma funcției pondere utilizată pentru calculul parametrilor metodei volumetrice este:

$$\varphi(x, \chi) = 1 - |\chi| \cdot x \quad (8.11)$$

Urmând etapele metodei volumetrice, prezentați în paragraful 7.4, pentru situația de solicitare din figura 8.20 a rezultat coeficientul de reducere a rezistenței la oboseală $k_f =$

2,868. Rezistența la oboseală a epruvetei cu creștătura V se obține, pentru $N_f = 48309$ cicluri de solicitare, în final:

$$\Delta\sigma_n = \frac{\Delta\sigma_0}{k_f} = 70,14 \text{ (MPa)} \quad (8.12)$$

În figura 8.21 sunt redată curbele de durabilitate $S - N$ estimate cu metoda volumetrică, pentru o probabilitate de supraviețuire de 50%.

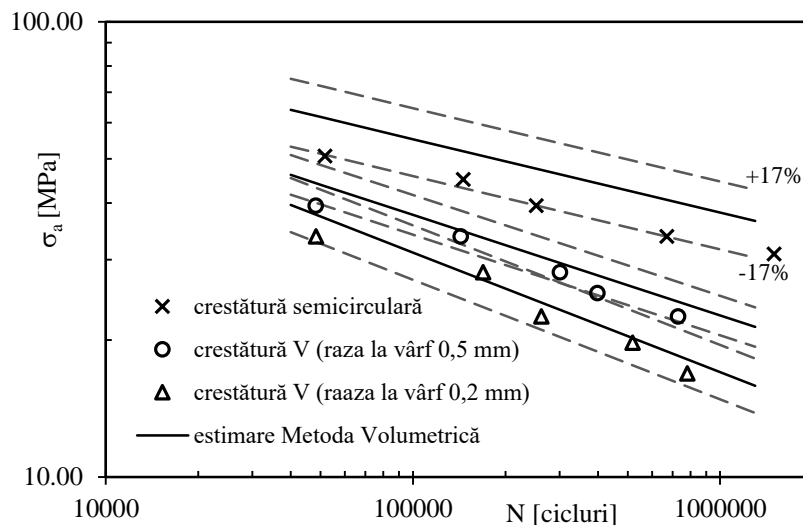


Figura 8.21. Curbele de durabilitate $S - N$ estimate cu metoda volumetrică, Negru ș.a. (2016)

Pentru creștătura semicirculară, metoda volumetrică supraestimează rezistența la oboseală, rezultatele experimentale fiind plasate în intervalul $-17 \div 0\%$ față de curba de durabilitate estimată. În schimb, pentru creștăturile V, metoda volumetrică furnizează predicții bune, rezultatele experimentale fiind plasate în intervalul $\pm 3 \times SD$.

8.2.5. Concluzii

Rezultatele experimentale și predicțiile pe baza TCD și a metodei volumetrică sunt prezentate în tabelul 8.10, pentru 50% probabilitate de supraviețuire.

TCD și metoda volumetrică supraestimează rezistența la oboseală a epruvetelor cu creștături semicirculare, rezultatele experimentale fiind plasate în intervalul $-17 \div 0\%$ față de curba de durabilitate estimată. Abordările utilizate furnizează predicții bune pentru epruvetele cu creștături V, caracterizate prin indici de împrăștiere la nivelul datelor experimentale.

Estimările pe baza criteriului valorii medii a energiei specifice de deformație sunt prezentate în tabelul 8.11. Predicțiile sunt îmbunătățite dacă se ține cont și de efectul razei de la vârful creștăturii.

Tabelul 8.10. Rezultatele experimentale și predicțiile TCD, metoda volumetrică, Negru ș.a. (2016)

| <i>Epruvete</i> | Experiment | | | TCD | | | Metoda Volumetrică | | |
|---|---------------------|------------|-------------------|---------------------|------------|-------------------|---------------------------|------------|-------------------|
| | σ_a (MPa) | k (-) | T_σ (-) | σ_a (MPa) | k (-) | T_σ (-) | σ_a (MPa) | k (-) | T_σ (-) |
| creștătură semicirculară $\rho = 3\text{ mm}$ | 32,64 | 6,452 | 1,170 | 38,68 | 9,615 | 1,410 | 38,34 | 6,211 | 1,189 |
| creștătură V $\rho = 0,5\text{ mm}$ | 21,27 | 4,630 | 1,258 | 20,00 | 4,444 | 1,198 | 22,66 | 4,525 | 1,222 |
| creștătură V $\rho = 0,2\text{ mm}$ | 16,21 | 3,831 | 1,472 | - | - | - | 16,93 | 3,802 | 1,312 |

Tabelul 8.11. Estimările criteriului ASED, Negru ș.a. (2016)

| <i>Epruvete</i> | ASED ($R_c = 0,059\text{ mm}$) | | | ASED ($R_c = 0,030\text{ mm}$) | | |
|--|--|------------|--------------|--|------------|--------------|
| | $c_w \times \Delta\bar{W}$ (MJ/m ³) | k (-) | T_w (-) | $c_w \times \Delta\bar{W}$ (MJ/m ³) | k (-) | T_w (-) |
| creștătură V $\rho = 0,5\text{ mm}$ $\rho = 0,2\text{ mm}$ | 0,800 | 1,706 | 3,017 | 0,630 | 1,984 | 1,889 |

Metodele prezentate reprezintă instrumente utile de estimare a duratei de viață în prezența concentratorilor de tensiune în domeniul durabilităților medii și mari. Pentru aplicarea abordărilor investigate sunt necesare informații minime despre proprietățile de material și sunt realizate utilizând analize numerice ale câmpului tensiunilor și deformațiilor de la vârful concentratorilor. Ele pot înlocui cu succes investigații experimentale laborioase și costisitoare.

Bibliografie

Abaqus/Standard 6.13 (2013) User's Guide, Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, USA.

Adib-Ramezani H., Jeong J. (2007) Advanced volumetric method for fatigue life prediction using stress gradient effects at notch roots, *Computational Materials Science* 39, 649-663.

Aliha M.R.M., Ayatollahi M.R., Pakzad R. (2008) Brittle fracture analysis using a ring-shape specimen containing two angled cracks, *International Journal of Fracture* 153, 63-68.

Berto F., Lazzarin P., Gómez F.J., Elices M. (2007) Fracture assessments of U-notches under mixed mode loading: two procedures based on the equivalent local mode I concept, *International Journal of Fracture* 148, 415-433.

Campagnolo A., Berto F., Lequillon D (2016) Mode II loading in sharp V-notched components: a comparison among some recent criteria for brittle fracture assessment, *Procedia Structural Integrity* 2, 1845-1852.

Gibson L.J., Ashby M.F. (1997) *Cellular Solids. Structures and Properties*, second ed., Cambridge University Press.

El Minor H., Louah M., Azari Z., Pluvinage G., Kifani A. (2002) Brittle mixed-mode (I+II): Application of the equivalent notch stress intensity factor to cracks emanating from notches, *Strength of Materials* 34, 570-577.

Illg W. (1956) Tests on notched and unnotched sheet specimens of 2024-T3 and 7075-T6 Aluminum alloy and of SAE 4130 Steel with special consideration of the life range from 2 to 10,000cycles, Technical note 3866, NACA, Washington.

Marşavina L. (2010) Fracture mechanics of cellular solids, in: *Cellular and Porous Materials in Structures and Processes* (eds. Altenbach H., Ochsner A.), Springer, Wien, 1-46.

Marşavina L., Constantinescu D.M, Linul E., Apostol D.A., Voiconi T., Sadowski T. (2014a) Refinements on fracture toughness of PUR foams, *Engineering Fracture Mechanics* 129, 54-66.

Marşavina L., Constantinescu D.M., Linul E., Apostol D.A., Voiconi T., Sadowski T. (2014) Evaluation of mixed mode fracture for PUR foams, *Procedia Materials Science* 3, 1342-1352.

Negru R.M. (2009) *Contribuții la studiul efectului de concentrare a tensiunilor cu aplicații în mecanica ruperii și oboseala materialelor*, Editura Politehnica, Timișoara (Teză de doctorat).

Negru R., Marșavina L., Filipescu H., Pașca N. (2013) Investigation of mixed mode I/II brittle fracture using ASCB specimen, *International Journal of Fracture* 181, 155-161.

Negru R., Marșavina L., Voiconi T., Linul E., Filipescu H., Belgiu G. (2015) Application of TCD for brittle fracture of notched PUR materials, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* 80, 87-95.

Negru R., Șerban D.A., Pop C., Marșavina L. (2018) Notch effect assessment in a PUR material using a ring shaped specimen, *Theoretical and Applied Fracture Mechanics* (in press, corrected proof).

Rus H.E. (2013) *Investigarea ruperii fragile în modul mixt pe materiale poliuretanică*, Editura Politehnica, Timișoara (Teză de Doctorat).

Seweryn A. (1994) Brittle fracture criterion for structures with sharp notches, *Engineering Fracture Mechanics* 47, 673-681.

Shiryayev A.M., Kotkis A.M. (1982) Methods for determining fracture toughness of brittle porous materials, *Industrial Laboratory* 48, 917-918.

Susmel L., Taylor D. (2007) A novel formulation of the theory of critical distances to estimate lifetime of notched components in the medium-cycle fatigue regime, *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* 30, pp. 567-581.

Susmel L., Taylor D. (2008) The Theory of Critical Distances to predict static strength of notched brittle components subjected to mixed-mode loading, *Engineering Fracture Mechanics* 75, 534-550.

Cuprins

| | |
|--|----|
| Prefață | 5 |
| 1. Noțiuni de mecanica ruperii pentru evaluarea integrității structurale | 7 |
| 1.1. <i>Introducere</i> | 7 |
| 1.2. <i>Parametrii de mecanica ruperii în domeniul liniar-elastic</i> | 11 |
| 1.2.1. Teoria lui Griffith..... | 11 |
| 1.2.2. Modificări ale teoriei lui Griffith | 14 |
| 1.2.3. Moduri de rupere..... | 15 |
| 1.2.4. Câmpul de tensiuni din vecinătatea unei fisuri | 17 |
| 1.2.5. Relația dintre G și K_I | 20 |
| 1.2.6. Estimarea zonei plastice de la vârful fisurii | 20 |
| 1.2.7. Diagramele de cedare..... | 22 |
| 1.3. <i>Evaluarea siguranței în exploatare</i> | 23 |
| <i>Bibliografie</i> | 26 |
| 2. Criterii de rupere | 27 |
| 2.1. <i>Criteriul de rupere bazat pe factorul de intensitate a tensiunii</i> | 27 |
| 2.2. <i>Criteriul tensiunii circumferențiale maxime (criteriul MTS)</i> | 29 |
| 2.3. <i>Generalizarea criteriului tensiunii circumferențiale maxime (criteriul GMTS)</i> | 31 |
| 2.4. <i>Criteriul energiei specifice de deformație minimă (criteriul S)</i> | 34 |
| 2.5. <i>Criteriul forței maxime de extensie a fisurii (G_{max})</i> | 39 |
| 2.6. <i>Criteriul factorului echivalent de intensitate a tensiunii</i> | 40 |
| <i>Bibliografie</i> | 41 |
| 3. Calculul numeric al parametrilor de mecanica ruperii | 43 |
| 3.1. <i>Stadiul actual al utilizării metodelor numerice în mecanica ruperii</i> | 43 |
| 3.2. <i>Programe utilizate pentru calculul parametrilor din mecanica ruperii</i> | 44 |
| 3.3. <i>Utilizarea metodei elementului finit pentru calculul parametrilor din mecanica ruperii</i> | 49 |
| 3.3.1. Modelarea singularității vârfului de tensiune..... | 49 |
| 3.3.2. Determinarea factorului de intensitate a tensiunii..... | 52 |
| <i>Bibliografie</i> | 58 |
| 4. Determinarea experimentală a parametrilor din mecanica ruperii | 60 |
| 4.1. <i>Introducere</i> | 60 |
| 4.2. <i>Metoda fotoelasticității. Interpretarea datelor fotoelastice</i> | 62 |
| 4.3. <i>Metoda tensometriei electrice rezistive</i> | 72 |
| 4.4. <i>Metoda termoelasticității</i> | 75 |
| 4.4.1. Efectul termoelastic..... | 75 |
| 4.4.2. Analiza termoelastică a tensiunilor | 75 |
| 4.4.3. Determinarea parametrilor de mecanica ruperii prin termoelasticitate..... | 77 |
| <i>Bibliografie</i> | 81 |

| | |
|---|-----|
| 5. Calculul durabilității pieselor cu concentratori de tensiune | 85 |
| 5.1. <i>Coefficientul teoretic de concentrare a tensiunilor. Gradientul tensiunilor</i> | 85 |
| 5.2. <i>Calculul la oboseală pe baza tensiunilor (abordarea S-N)</i> | 87 |
| 5.2.1. Factorul de reducere a rezistenței la oboseală K_f | 87 |
| 5.2.2. Estimarea curbei de durabilitate S-N | 89 |
| 5.3. <i>Evaluarea durabilității pe baza conceptelor de mecanica ruperii</i> | 91 |
| 5.3.1. Inițierea fisurii de oboseală | 92 |
| 5.3.2. Propagarea fisurilor sub acțiunea solicitărilor variabile | 95 |
| <i>Bibliografie</i> | 101 |
| | |
| 6. Soluții pentru calculul tensiunilor din zona de la vârful concentratorilor | 104 |
| 6.1. <i>Soluția Williams pentru concentratori în formă de V singulari (cu raza de racordare la vârf egală cu zero)</i> | 104 |
| 6.2. <i>Soluția Creager-Paris pentru concentratorul adânc și subțire (cu raza de racordare la vârf mică)</i> | 106 |
| 6.3. <i>Cazul concentratorilor de tensiune nesingulari (crestătură V rotunjită, crestătură U)</i> | 109 |
| <i>Bibliografie</i> | 115 |
| | |
| 7. Abordări ingineresti de evaluare a integrității structurale | 117 |
| 7.1. <i>Teoria Distanțelor Critice (TCD)</i> | 117 |
| 7.1.1. Scurt istoric al TCD | 117 |
| 7.1.2. Metodele TCD | 119 |
| 7.1.3. Aplicarea TCD la evaluarea rezistenței la oboseală | 122 |
| 7.1.4. Reformularea TCD la solicitările în moduri mixte | 124 |
| 7.2. <i>Criteriul valorii medii a energiei specifice de deformație</i> | 126 |
| 7.2.1. Expresia energiei de deformație pentru crestătura V ascuțită | 126 |
| 7.2.2. Expresia energiei de deformație pentru crestătura V rotunjită (modul I) | 129 |
| 7.2.3. Expresia energiei de deformație pentru crestătura U (modul mixt) | 131 |
| 7.2.4. Aplicarea criteriului ASSED la evaluarea rezistenței la oboseală | 133 |
| 7.3. <i>Metoda modelării fisurii</i> | 137 |
| 7.4. <i>Metoda volumetrică</i> | 139 |
| <i>Bibliografie</i> | 142 |
| | |
| 8. Aplicații ale metodelor moderne la estimarea ruperii fragile și a durabilității | 147 |
| 8.1. <i>Estimarea ruperii fragile a materialelor poliuretanice</i> | 147 |
| 8.1.1. Aplicarea TCD la ruperea fragilă a epruvetelor cu concentratori de tensiune solicitate în modul I și modul mixt I+II | 147 |
| 8.1.2. Aplicarea ASSED la ruperea fragilă a epruvetelor de tip disc cu crestătură U solicitate în modul mixt I+II | 157 |
| 8.2. <i>Estimarea rezistenței la oboseală în domeniul durabilităților medii în prezența concentratorilor de tensiune</i> | 162 |

| | |
|---|-----|
| 8.2.1. Rezultate experimentale..... | 162 |
| 8.2.2. Aplicarea TCD în domeniul durabilităților medii..... | 164 |
| 8.2.3. Evaluarea rezistenței la oboseală după criteriul ASED..... | 166 |
| 8.2.4. Evaluarea rezistenței la oboseală cu metoda volumetrică..... | 168 |
| 8.2.5. Concluzii..... | 170 |
| <i>Bibliografie</i> | 172 |
| Cuprins | 174 |